

1 Suites numériques

1 Notion de suite

Intuitivement une suite de nombres réels est une liste ordonnée de nombres réels « numérotés » à l'aide d'entiers naturels.

Définition 1. 1*Suite numérique*

On appelle suite numérique toute fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement pour $n \geq k$ avec $k \in \mathbb{N}$).

Le nombre $u(n)$, noté u_n (« u indice n ») est appelé terme de rang n ou terme général de la suite.

La suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq k}$) ou plus simplement (u_n) .

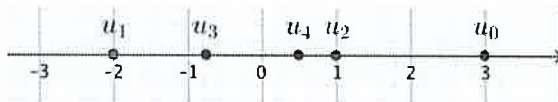
Remarque

Il ne faut pas confondre le nombre u_n et (u_n) : u_n est le terme de rang n de la suite (u_n) .

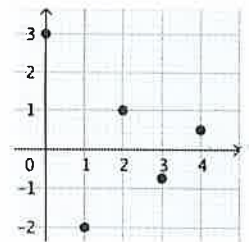
Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite est constituée de points isolés pouvant être représentés :

- soit en plaçant les réels $u_0, u_1, \dots$ sur une droite graduée,

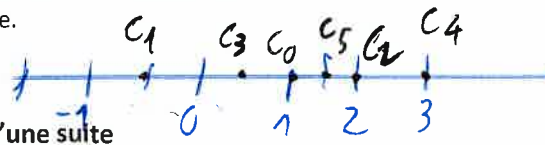
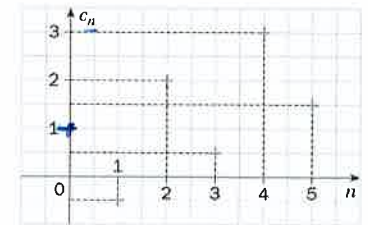


- soit en plaçant les points de coordonnées $(0; u_0), (1; u_1), \dots$ dans un repère.

**Exemple 1. 1**

Sur le graphique ci-contre on a représenté les premiers termes d'une suite (c_n) .

1. Quelle est la valeur du deuxième terme de la suite ?
2. Quelle est la valeur du terme qui précède c_4 ?
3. Représenter les termes c_n , pour $n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ sur une droite graduée.

**2 Modes de génération d'une suite**

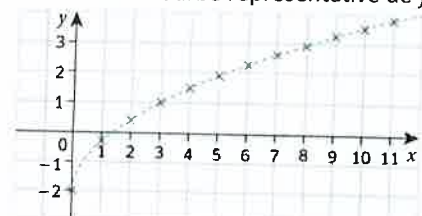
Une suite (u_n) est entièrement définie sur $\mathbb{N}$ (resp à partir d'un certain rang k) si on est capable de donner u_n pour n'importe quel entier $n \in \mathbb{N}$ (resp $n \geq k$). Il existe beaucoup de façons pour définir une suite mais au lycée on en distingue principalement deux : explicitement ou par récurrence.

2. 1 Suites définies par une formule explicite $u_n = f(n)$ **Définition 1. 2***formule explicite : $u_n = f(n)$*

Une suite (u_n) est donnée par une formule explicite lorsque le nombre u_n est donné en fonction du nombre n . On a donc $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Conséquence

Dans le plan muni d'un repère, les points $(n; f(n))$, représentant la suite de terme général $u_n = f(n)$, sont situés sur la courbe représentative de f .

**Exemple 1. 2**

Pour chacune des suites de terme général u_n indiquer à partir de quel rang elle est définie, calculer ses trois premiers termes et exprimer u_{n+1} et u_{3n+1} en fonction de n et donner un algorithme renvoyant u_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

- a. $u_n = (-1)^n \sqrt{2n-1}$ b. $u_n = \frac{1}{n^2-4}$

Exemple 1.1

1. $u_1 = -\frac{1}{2}$

2. $u_3 = \frac{1}{2}$

3. Voir feuille

Exemple 1.2

a. Il faut que $2n-1 \geq 0$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$2n-1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2}$$

Donc à partir du rang 1

$$u_1 = (-1)^1 \times \sqrt{2 \times 1 - 1} = -1$$

$$u_2 = (-1)^2 \times \sqrt{2 \times 2 - 1} = \sqrt{3}$$

$$u_3 = (-1)^3 \times \sqrt{2 \times 3 - 1} = -\sqrt{5}$$

on remplace le n par des $n+1$

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \sqrt{2(n+1)-1}$$

$$= (-1)^{n+1} \sqrt{2n+1}$$

$$u_{3n+1} = (-1)^{3n+1} \sqrt{2 \times (3n+1) - 1}$$

$$= (-1)^{3n+1} \sqrt{6n+1}$$

from math import *

def u(n):

$$u = (-1) ** (n) * \text{sqrt}(2 * n - 1)$$

return u

from math import *

def u(3):

u =

$$f. \frac{1}{n^2-4} \text{ n'existe que si } n^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow n = -2 \text{ ou } n = 2$$

Alors la suite est définie à partir de 3

$$u_3 = \frac{1}{3^2-4} = \frac{1}{5}$$

$$u_4 = \frac{1}{4^2-4} = \frac{1}{12}$$

$$u_5 = \frac{1}{5^2-4}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2-4}$$

$$u_{3n+1} = \frac{1}{(3n+1)^2-4}$$

2. 2 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1.3

définition par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite est donnée sous forme récurrente (d'ordre 1) lorsque :

- son premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) est donné
- le terme u_{n+1} est donné en fonction du terme précédent u_n .

On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$, appelée relation de récurrence, où f est une fonction.

Exemple 1.3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Exprimer u_1 en fonction de u_0 et calculer u_1 . Calculer u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} . Exprimer u_{2n+2} en fonction de u_{2n} .
3. Proposer une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Donner un algorithme demandant un entier n en entrée et renvoyant le nombre u_n en sortie.

Remarques

- Contrairement aux suites explicites, avec la seule donnée du premier terme et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on ne peut pas calculer un terme quelconque de la suite sans avoir obtenu tous les termes précédents.
- Une suite définie par récurrence peut faire intervenir plus de deux termes consécutifs. Par exemple, la suite de Fibonacci définie par la donnée de $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente **d'ordre 2** (un terme est défini en fonction des **deux** termes précédents).
- La donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence d'ordre 1 ne définit pas toujours une suite. Prenons par exemple $u_0 = 2$ et $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{x-1}$.

On a $u_1 = \frac{1}{2-1} = 1$ mais u_2 n'existe pas puisque l'image de 1 par f n'existe pas. Cet exemple montre que si il existe $x \in D_f$ tel que $f(x) \notin D_f$ (ie : D_f n'est pas stable par f) alors la donnée de u_0 et d'une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ ne définit pas nécessairement une suite.

Pour autant, ce n'est pas parce que $f(D_f) \not\subseteq D_f$ qu'on ne peut pas définir une suite récurrente avec f . En effet, ce problème d'existence des termes de la suite dépend également du premier terme choisi. Prenons par exemple $u_0 = -1$.

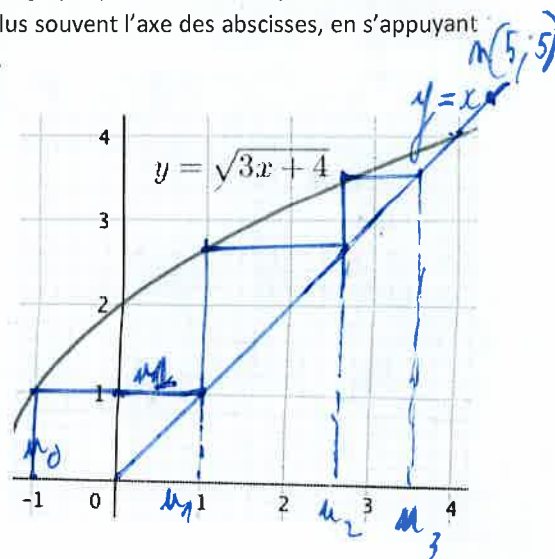
On a alors $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{2}{3}$; $u_3 = -\frac{3}{5}$; $u_4 = -\frac{5}{8}$; etc. On pourrait montrer que lorsque $x \in [-1; 0]$ alors $f(x) \in [-1; 0]$. On en déduirait que lorsque un terme u_n appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ alors le terme suivant, $u_{n+1} = f(u_n)$, appartient aussi à l'intervalle $[-1; 0]$, ce qui permet d'affirmer, puisque $u_0 \in [-1; 0]$, que la suite est définie. Plus généralement, si u_0 appartient à un intervalle I stable par f alors $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est un élément de I .

Représentation graphique

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite par l'ensemble des points $M_n(n; u_n)$. On préfère représenter ses premiers termes sur un axe, le plus souvent l'axe des abscisses, en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction définissant la relation de récurrence.

Construisons les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. a Sur le graphique ci-contre tracer la droite d'équation $y = x$.
b. Placer le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses ;
c. Utiliser C_f pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées ;
d. Reporter u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$;
2. Procéder de même pour construire les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
3. (u_n) semble-t-elle converger ? Si oui vers quel réel ?



Exemple 1.3

$$1) u_1 = 3u_0 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$$

$$u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$$

$$u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$$

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3u_{n-1} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} &= 3u_{2n+1} - 1 \\ &= 3(3u_{2n} - 1) - 1 \end{aligned}$$

u_{16} en fonction de u_4

$$u_{16} = (3u_{14} - 1) - 1$$

$$3) u = RI \quad f(x, y) = x \times y$$

$$u = f(R, I)$$

$$\text{Avec } u_{n+1} = 3u_n - 1 \text{ et } f: x \in \mathbb{R} \mapsto 3x - 1$$

$$4) \text{ def } u(n):$$

$$u = 1$$

for i in range(n):

$$u = 3u - 1$$

return u

Exemple 1.4

1) a) b) c) d) voir graphique

3) il semble q (u_n) soit croissante et converge vers 4

3 Sens de variation d'une suite

Définition 1.3

Suite croissante, décroissante, constante, monotone

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que

- i. (u_n) est **croissante** lorsque $u_n \leq u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- ii. (u_n) est **décroissante** lorsque $u_n \geq u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- iii. (u_n) est **constante** (ou stationnaire) lorsque $u_n = u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- iv. (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque

- On définit de même une suite strictement croissante ou strictement décroissante.
- Pour certaines suites l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ n'est vraie que pour $n \geq p$. On dit alors que (u_n) est croissante à partir du rang p .
- La définition précédente ne doit pas laisser penser qu'une suite est soit croissante soit décroissante. Par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, prenant la valeur 1 si n est pair et -1 sinon, n'est ni croissante ni décroissante. Cette suite est d'ailleurs qualifiée d'alternée.
- Pour démontrer qu'une suite n'est pas monotone il suffit de deux inégalités constituant un contre exemple.

La méthode la plus générale pour étudier la monotonie d'une suite consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Propriété 1.1

monotonie et signe de $u_{n+1} - u_n$

- i. Une suite (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- ii. Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

Exemple 1.5

Etudier la monotonie de (u_n) où :

- a. $u_n = 3\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$
- b. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

Lorsque les termes d'une suite sont strictement positifs, dans certains cas, notamment pour des suites dont le terme général contient une puissance ou un produit, la propriété suivante permet d'étudier rapidement la monotonie.

Propriété 1.2

monotonie et comparaison de u_{n+1}/u_n à 1Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.

- i. (u_n) est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- ii. (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Exemple 1.6

Etudier la monotonie de (u_n) où :

- a. $u_n = \frac{7^n}{n+1}$
- b. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n(1 + n^2)$

Si une suite est définie de façon explicite par l'égalité $u_n = f(n)$, pour tout entier n , on peut utiliser le résultat suivant :

Propriété 1.3

monotonie et suites de la forme $u_n = f(n)$

Si f est une fonction définie et monotone sur un intervalle $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ à la même monotonie que f à partir du rang p .

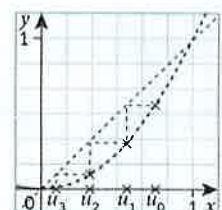
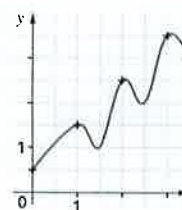
Exemple 1.7

Etudier la monotonie de (u_n) où :

$$u_n = n^2 - n$$

Remarque

- La réciproque est fausse. Le graphique ci-dessous donne un exemple de suite (u_n) croissante définie par $u_n = f(n)$ où f ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
- Ce résultat ne s'applique pas aux suites définies par récurrences. Par exemple avec la suite définie.



Exemple 1.5

a. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 3\left(n+1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= 3\left(\underbrace{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}_{a^2} - \underbrace{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}_{b^2}\right) \\
 &= 3\left(n - \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 6n \geq 0 \quad \begin{matrix} =1 & =2n \end{matrix}
 \end{aligned}$$

 (u_n) est croissanteb. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= u_n(1 - u_n) - u_n \\
 &= u_n - u_n^2 - u_n \\
 &= -u_n^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

Normalment on factorise

Donc (u_n) est décroissante

Exemple 1.6

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (car $7^n > 0$ et $n+1 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}}{\frac{n+2}{7^n}} = \frac{7^{n+1} \cdot 7^n}{n+2} = \frac{7^{2n+1}}{n+2}$$

$$\frac{7^{2n+1}}{n+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{7^{2n+1}}{n+2} \geq 1 \Leftrightarrow 7^{2n+1} \geq n+2 \Leftrightarrow 6n \geq -5 \Leftrightarrow n \geq \frac{5}{6}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{7^{2n+1}}{n+2} \geq 1 \text{ donc } (u_n) \text{ croissante}$$

b. Supposons que dans la consigne on ait " $u_n > 1$ "

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n(1+n^2)}{u_n} = 1+n^2 > 1$$

 (u_n) est $\nearrow$

Activité 1 : Découvrir la notion de suite numérique

On considère la liste infinie de nombres suivante :

suite ordonnées $\rightarrow -8; -5; -2; 1; 4; 7$

1. Poursuivre la liste, de manière logique, en donnant les deux nombres suivants.

2. La liste donnée constitue une suite de nombres ordonnés qu'on appelle **suite numérique**. On peut écrire les réels de cette liste à l'aide d'une notation indicielle, permettant de numéroter les éléments de la liste, en posant par exemple $u_0 = -8; u_1 = -5; u_2 = -2; u_3 = 1$; etc. La suite $(-8; -5; -2; 1; \dots)$ s'écrit alors $(u_0; u_1; u_2; u_3; \dots)$ ou plus simplement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Quelle est la valeur du terme u_5 ?

b. Quelle est la valeur du 6^{ème} terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, comment peut-on le noter ?

3. a. Parmi les formules proposées, laquelle permet d'obtenir u_n en fonction de son rang n ?

Cette formule est appelée **formule explicite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$u_n = n + 3 \quad u_n = -8 + 3n \quad u_n = -8n + 3$$

b. En déduire le terme de rang 20 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. L'algorithme ci-contre, rédigé en langage Python, donne la liste des premiers termes d'une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Déterminer le terme initial w_0 de la suite.

b. Quel est le troisième terme de la suite ? Quelle est la valeur de w_3 ?

c. Compléter la phrase : la ligne 2 permet d'afficher $w_{\dots} = \dots$

1 $w=[0,1,8,27]$

2 $w.append(64)$

L'instruction **.append** de la ligne 2 permet de rajouter un terme à la liste w .

5. Comment définir une suite de manière explicite ?

Quel lien avec la notion de fonction apprise en seconde ?

Activité 2 : Découvrir la notion de suite définie par récurrence

On souhaite introduire la notion de suite définie par récurrence à l'aide du programme ci-dessous.

1 $u=\text{float}(\text{input}(\text{"entrer un nombre : "}))$

2 $u=2*u$

3 $u=u+10$

4 $\text{print}(u)$

1. Appliquer le programme pour le nombre 3.

2. Appliquer de nouveau le programme au résultat obtenu.

On continue d'appliquer le programme à chaque nouveau résultat. On obtient alors une suite de nombres. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on note u_n le nombre obtenu lors de l'application du programme au n -ième résultat. On pose

$$u_0 = 3.$$

3. Préciser les valeurs de u_1, u_2 et u_3 .

4. a. Quelle formule permet de passer de u_1 à u_2 ? Et de u_2 à u_3 ?

b. Pour tout entier n , exprimer u_{n+1} en fonction u_n .

5. Combien de termes faut-il calculer pour déterminer u_{100} ?

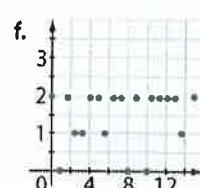
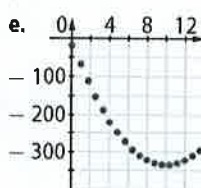
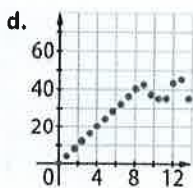
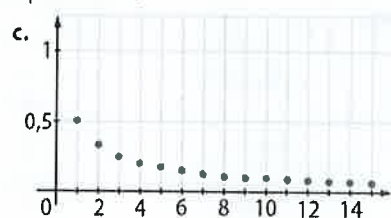
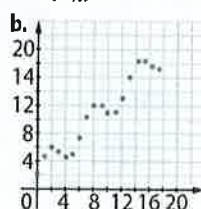
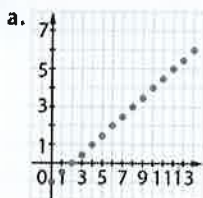
6. Compléter l'algorithme donné pour qu'il calcule et affiche u_n où n est un entier à saisir par l'utilisateur.

7. Que signifie « définir une suite par récurrence » ?

Quelle différence principale y a-t-il avec les suites définies explicitement ?

Activité 3 : Déterminer le sens de variation d'une suite

Dans chacun des graphiques ci-dessous, une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ a été représentée.



1. Pour chacune des six suites représentées, déterminer quelle(s) propriété(s) semble(nt) être vérifiée(s).

Propriété 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Propriété 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

Propriété 3 : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Propriété 4 : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

2. En considérant les suites comme des fonctions particulières, quelle(s) propriété(s) parmi les propriétés 1, 2, 3 et 4 semble(nt) caractériser le fait qu'une suite est croissante ? décroissante ? Expliquer.

1. Définir une suite

Exercice 1. 1 (Hatier 54 p 30)

Les premiers termes de la suite (t_n) sont $t_0 = 7$, $t_1 = 3$, $t_2 = 7$ et $t_3 = 3$. Parmi les formules explicites suivantes, trouver celle qui peut correspondre à la suite (t_n) . Justifier.

- a. $7 - 4n$ b. $4n^2 - 8n + 7$
c. $7 - 4^n$ d. $5 + 2 \times (-1)^n$

Exercice 1. 2 (Hatier 55 p 30)

La suite (b_n) est la suite des multiples positifs non nuls de 7. On a alors $b_0 = 1 \times 7 = 7$.

- a. Calculer b_1 et b_2 .
b. Quel est le terme qui précède b_5 et quelle est sa valeur ?
c. Quel est le terme qui suit b_5 et quelle est sa valeur ?

Exercice 1. 3 (Hatier 65 p 31)

1. Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer une expression du terme d'indice $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

- a. $u_n = 3 - 0,5^n$ b. $v_n = 4n + \sqrt{5 + n}$
c. $w_n = \frac{2n+3}{n+7}$ d. $t_n = 1 - 5n + 2n^2$

2. Même question avec le terme d'indice $n + 2$ puis $2n + 1$.

Exercice 1. 4 (41 p 86)

Soit une suite (u_n) définie de la manière suivante : pour tout entier naturel n , le terme d'indice n est égal au carré de son rang auquel on soustrait 3. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

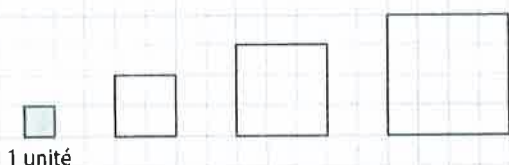
Exercice 1. 5 (44 p 86)

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer plusieurs fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à noter la liste des nombres obtenus.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance deux fois le dé ?
2. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance trois fois le dé ?
3. On appelle v_n le nombre d'issues possibles pour n lancers successifs du dé.
a. Donner les valeurs de v_1 , v_2 et v_3 .
b. Exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 1. 6 (48 p 86)

On construit une suite de carrés : le premier carré a pour côté une unité, le deuxième carré a pour côté deux unités, ..., le n -ième carré a pour côté n unités. On prend pour unité d'aire, l'aire du carré de côté une unité.



Pour tout naturel n non nul, on note a_n l'aire du n -ième carré.

1. Donner a_1 , a_2 , a_3 et a_4 .
2. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
3. Calculer la valeur de a_{11} .

Exercice 1. 7 (Hatier 57 p 20)

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les six premiers termes, puis représenter le nuage de points correspondant.

- a. Pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{0,5n+3}{n-1}$.
b. Pour tout nombre entier naturel n , $v_n = 1,5^n - 2$.
c. Pour tout nombre entier naturel n , $w_n = n^2 - n$.
d. Pour tout nombre entier naturel n , $t_n = 1 + 2 \times (-1)^n$.

2. Pour chacune des suites précédentes, exprimer le terme d'indice $n + 1$ en fonction de n .

Exercice 1. 8 (Hatier 64 p 31)

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
1 def V(n):
2     t=n*n+5
3     t=t/pow(2,n)
4     return t
```

Aide

`pow(2,n)` permet de calculer 2^n .

- a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
b. Exprimer v_n en fonction de n .
c. En déduire une autre écriture de cette fonction en Python utilisant une seule affectation.

Exercice 1. 9 (Hatier 61 p 31)

Écrire une fonction en Python de paramètre n , un nombre entier naturel, et qui renvoie la valeur de :

$$u_n = \frac{n^3 - 5}{5n + 3}.$$

Exercice 1. 10 (Hatier 63 p 31)

On utilise la feuille de calcul ci-dessous pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n) .

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	b_n					
3	c_n	-1	-1	1	5	11

- a. Pour tout nombre entier naturel n , $b_n = 3 + n + n^2$. Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on saisir dans la cellule B2 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?
b. Pour calculer les termes de la suite (c_n) , on a saisi la formule suivante dans la cellule B3 : `=B1^2-C1`. Quelle est la formule explicite de la suite (c_n) ?

Exercice 1. 11 (livrescolaire 41 p 32)

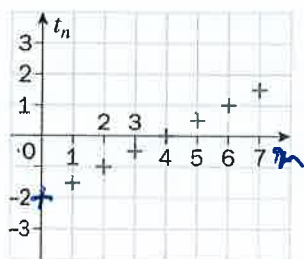
On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	C2	2	3	4
2	u_n	-2	$=3 \times C1^2 + 5 \times C1 - 2$			
3						

- Si on étend la formule de la case C2 à la case D2, quelle est la valeur de u_2 ?
- Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

Exercice 1. 12 (Hatier 58 p 30)

On a représenté ci-dessous les premiers termes de la suite (t_n) par un nuage de points.



- Réaliser un tableau de valeurs.
- Quelle remarque peut-on formuler sur les points du nuage ?
- Conjecturer une formule explicite de la suite (t_n) .
- En supposant exacte la conjecture émise à la question c, à partir de quel nombre entier k , t_k est-il supérieur à 40 ?
- Ecrire un algorithme demandant un réel positif A en entrée et revoyant le premier entier k tel que $t_k \geq A$ en sortie.

Exercice 1. 13 (Hatier 60 p 31)

On considère la succession de figures suivantes.



Figure 1

Figure 2

Figure 3

On note b_n le nombre de bâtons nécessaires à la construction de la figure n où $n \in \mathbb{N}$.

- Donner les valeurs de b_1 , b_2 et b_3 .
 - Tracer la figure 4 et donner la valeur de b_4 .
 - Conjecturer une formule explicite de la suite (b_n) .
- En supposant exacte la conjecture émise à la question 1c, déterminer :
 - la valeur de b_{20} ;
 - quelle est la plus grande figure que l'on puisse construire avec 200 bâtons.

Exercice 1. 14 (69 p 88)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{3}{2}n - 1$. Déterminer le plus petit entier p tel que $v_p > 300$.

Exercice 1. 15 (70 p 88)

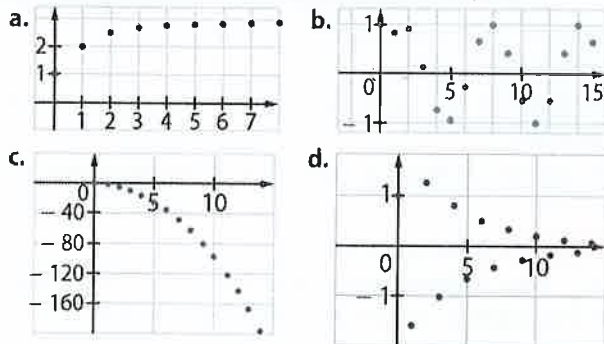
On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n , par $w_n = -n^2 + 2n + 13$. Déterminer le plus petit entier p tel que $w_p < 10$.

Exercice 1. 16 (71 p 88)

On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n , par $c_n = n^3 + 1$. Déterminer le plus petit entier p tel que $c_p > 28$.

Exercice 1. 17 (CQFD 43 p 66)

Dans chaque cas, conjecturer si possible la limite éventuelle de la suite représentée dans un repère.

**Exercice 1. 18** (22 p 85)

On considère une table de valeurs des suites suivantes. Conjecturer leur limite.

- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

n	1	10	100	1 000	10 000
u_n	0	0,99	0,999 9	0,999 999	0,999 999 99

- Pour tout entier naturel n , $u_n = n^4$.

n	1	10	100	1 000
u_n	1	10 000	100 000 000	1 000 000 000 000

Exercice 1. 19 (23 p 85)

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = n^2 - 16n + 55.$$

- À l'aide de la calculatrice, observer les termes v_n pour des grandes valeurs de n .
- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (v_n) ?

Exercice 1. 20 (CQFD 86 p 72)

Soit a , b et c des réels. On définit (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

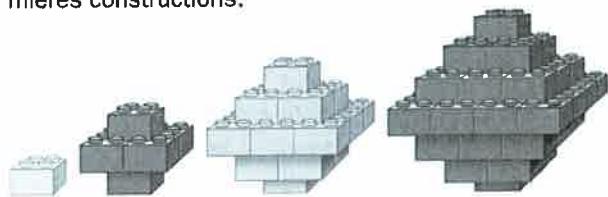
$$v_n = an^4 + bn^3 + cn^2.$$

- Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , on a $v_{n+1} - v_n = n^3$ si et seulement si $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = v_{n+1}$.
- Pour tout entier naturel non nul n , en déduire :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 1. 21 (Hatier 153 p 40)

Maëlys a fabriqué une succession d'octaèdres pleins avec des briques de construction carrées. Voici ses premières constructions.



Sa première construction est constituée d'une seule brique, la seconde de 6 et la troisième de 19.

a. Combien y a-t-il de briques carrées dans sa quatrième

construction ?

b. On note B_n le nombre de briques carrées nécessaires à la construction du $n^{\text{ème}}$ octaèdre, où n désigne un nombre entier naturel non nul.

Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = 2 \times (1 + 2^2 + \dots + n^2) - n^2$.

c. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \frac{2n^3 + n}{3}$.

d. Combien de briques le 10^e octaèdre compte-t-il ?

e. Quel est le plus grand octaèdre que l'on peut construire avec 2 000 briques carrées ?

2 Modéliser à l'aide d'une suite récurrente**Exercice 1. 22** (14 p 84)

Soit (t_n) la suite définie par son premier terme $t_0 = -3$ et telle qu'en multipliant un terme par 4 et en lui ajoutant 5 on obtienne le terme suivant.

a. Déterminer t_1 et t_2 .

b. Exprimer t_3 à l'aide de t_2 .

Exercice 1. 23 (58 p 87)

On donne la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 2}$.

1. u_1 est égal à :

a. $\sqrt{22}$ b. 2 c. $\sqrt{10}$

2. u_2 est égal à :

a. $\sqrt{22}$ b. 2 c. $\sqrt{10}$

Exercice 1. 24

Donner dans chacun des cas les valeurs de u_2 , u_3 et u_4 .

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, $\forall n \geq 0$;

2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \geq 0$.

Exercice 1. 25 (42 p 86)

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n telle que $w_0 = -4$ et chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 3 et en lui ajoutant 1.

1. Vérifier que w_1 est égal à -11.

2. Calculer w_2 .

3. Donner la relation entre w_{n+1} et w_n pour tout entier naturel n .

Exercice 1. 26 (livrescolaire 48 p 33)

On considère les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n + 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - (n-3) \end{cases}$ d. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2n+3} \end{cases}$

1. Pour chacune des suites, exprimer u_n en fonction de u_{n-1} pour tout entier $n \geq 1$ puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} pour tout entier n .

2. En déduire une expression de u_{n+2} en fonction de u_n et de l'entier n .

Exercice 1. 27 (45 p 86)

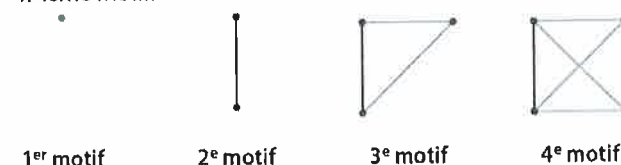
On place 15 000 € sur un livret d'épargne rémunéré à 2 % d'intérêts composés. On suppose que l'on retire 400 € chaque début d'année à partir de la deuxième année.

1. Calculer le capital au bout d'un an après le retrait de 400 €.

2. On appelle v_n le capital présent au bout de la n -ième année après le retrait de 400 €. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

Exercice 1. 28 (46 p 86)

On considère la suite de motifs ci-dessous dans laquelle on rajoute un point à chaque étape. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle u_n le nombre de segments tracés sur le n -ième motif.

1^{er} motif2^e motif3^e motif4^e motif

1. Donner les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

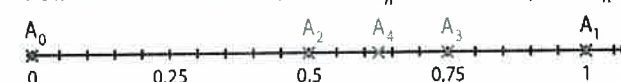
2. Exprimer pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n .

Exercice 1. 29 (49 p 86)

Sur une droite graduée, le point A_0 a pour abscisse 0, le point A_1 a pour abscisse 1. Le point A_2 est le milieu de $[A_0A_1]$, A_3 est le milieu du segment joignant A_1 et A_2 .

On itère le procédé et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A_n est le milieu du segment joignant A_{n-2} et A_{n-1} .

Pour tout entier naturel n , on note x_n l'abscisse du point A_n .



Donner les deux premiers termes de la suite (x_n) et la relation de récurrence liant x_n , x_{n-1} et x_{n-2} .

Exercice 1. 30 (livrescolaire 46 p 33)

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

2.

Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n .

Exercice 1. 31 (Hatier 88 p 33)

On utilise la feuille de calcul ci-contre pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n) .

	A	B	C
1	n	b_n	c_n
2	0		-3
3	1		1,5
4	2		0,2
5	3		-1,5
6	4		9
7	5		0,5

1. La suite (b_n) est définie par $b_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 3 - n + b_n$.

a. Quelle valeur doit-on saisir dans la cellule B2 ?
b. Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?

2. Pour calculer les termes de la suite (c_n) , on a saisi la formule suivante dans la cellule C3 : $=(C2-A2)/(C2+1)$. Définir la suite (c_n) .

Exercice 1. 32 (Hatier 90 p 33)

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
1 def V(n):
2     t=4
3     for k in range(n):
4         t=2*t-5
5     return t
```

- Quelle est la valeur de v_0 ?
- Proposer une forme récurrente de la suite (v_n) .
- Déterminer la valeur de v_3 .

Exercice 1. 33 (64 p 88)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et l'algorithme ci-contre permettant de créer la liste des termes de la suite de u_0 à u_n . On considère $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Déterminer ce que contient la variable L en fin d'algorithme pour $n = 4$.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

```
U ← 3
L ← [U]
Pour i variant de 1 à n
    U ← f(U)
    L ← L + [U]
Fin Pour
```

Exercice 1. 34 (73 p 88)

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$.

1. Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable S contienne la somme $v_0 + \dots + v_N$ en fin d'algorithme.

```
V ← 4
S ← 4
Pour i variant de 1 à N
    V ← V + 1/V
    S ← S + V
Fin Pour
```

2. Écrire une fonction Python de paramètre N qui retourne la somme $v_0 + \dots + v_N$.

Exercice 1. 35 (Hatier 76 p 32)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où :

$$f(x) = 0,5x(4 - x) + 2.$$

- Expliciter la relation entre u_{n+1} et u_n .
- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Conjecturer la valeur de u_{2020} .

Exercice 1. 36 (Hatier 77 p 32)

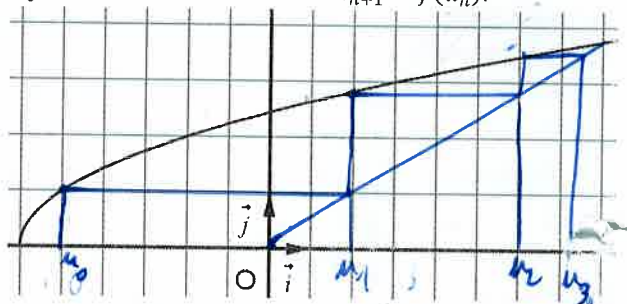
La suite (v_n) est définie par $v_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{2v_n - 5}{4}$.

- Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
- Donner une expression de la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

Exercice 1. 37

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[-6; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Construire les premiers termes de la suite (u_n) avec :

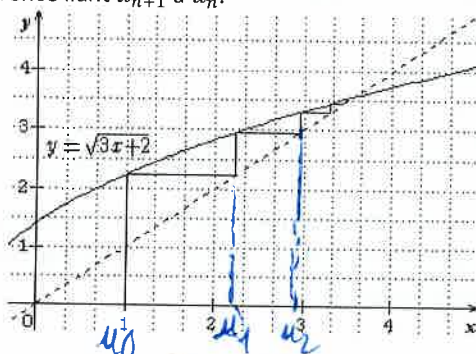
- a. $u_0 = -5$;
- b. $u_0 = 8$.

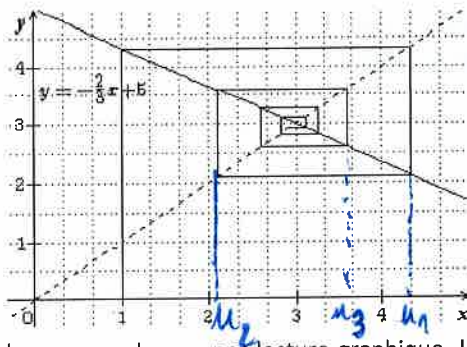
Dans chaque cas décrire le comportement de la suite : les termes augmentent-ils ou diminuent-ils ? La suite semble-t-elle avoir une limite ?

2. Quelle est la particularité de la suite lorsqu'on choisit $u_0 = 3$?

Exercice 1. 38

Sur les figures suivantes on a représenté les termes d'une suite définie par récurrence. Par lecture graphique donner les trois premiers termes de chaque suite et la relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n .





Dans chaque cas, donner par lecture graphique, les trois premiers termes de la suite, une relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n et conjecturer la limite de (u_n) .

Exercice 1. 39 (65 p 88)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1 \text{ et } u_0 = -2.$$

1. Écrire une fonction Python de paramètre n qui retourne la liste des n premiers termes de la suite (u_n) .
2. Émettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .

Exercice 1. 40 (67 p 88)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et la relation $u_{n+1} = 3u_n + 7$ pour tout entier naturel n .

Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle retourne le plus petit entier p tel que $u_p > 1\,000$.

```
def seuil():
    A=15
    N=0
    while A<=1000:
        N=N+1
        A=3*A+7
    return (N)
```

Exercice 1. 41 (CQFD 41 p 66)

A l'aide d'un programme Python déterminer le premier entier naturel n tel que $u_n > 5$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,02u_n$.

Exercice 1. 42 (CQFD 42 p 66)

A l'aide d'un programme Python déterminer le premier entier naturel n tel que $-0,1 < u_n < 0,1$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = -5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,3u_n$.

Exercice 1. 43 (Hatier 150 p 39)

1. a. Tracer un rectangle de dimensions 15 cm x 3 cm et calculer son aire.

b. Tracer un nouveau rectangle dont la longueur est égale à la moyenne des dimensions précédentes et ayant la même aire.

c. Appliquer le même processus pour tracer un nouveau rectangle.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) , où a_n représente la longueur et b_n la largeur d'un rectangle tracé comme à la question 1.

a. Expliquer les définitions suivantes :

$$a_0 = 15, b_0 = 3 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{45}{a_{n+1}}.$$

b. Que valent a_1 , b_1 , a_2 et b_2 ?

c. À l'aide d'un outil logiciel, déterminer les valeurs de

a_6 et b_6 .

d. Pourquoi a-t-on $a_6 \approx b_6$?

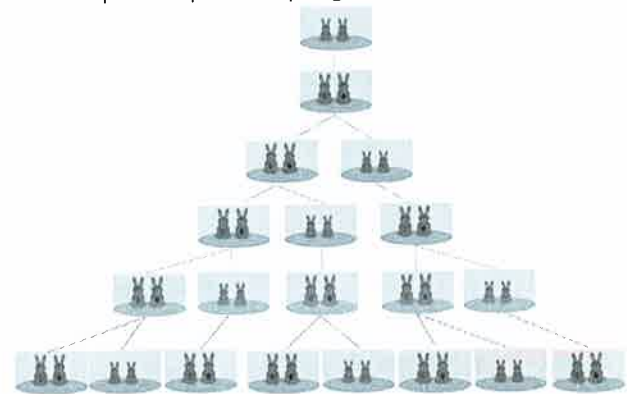
Exercice 1. 44

1. La suite de Fibonacci est la suite définie par récurrence à partir des deux premiers termes $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Calculer F_3 , F_4 et F_5 .

2. La suite de Fibonacci viendrait de l'histoire suivante :

- Le premier mois on possède un couple de lapereaux.
- Le mois suivant ces lapereaux deviennent adultes et peuvent engendrer un couple de lapereaux le mois suivant.
- Le troisième mois, le couple de lapin donne naissance à un couple de lapereaux qui agira de la même façon.



a. Justifier que les nombres de lapins obtenus constituent les termes de la suite de Fibonacci.

b. Déterminer F_{12} et interpréter dans le contexte.

3. Le nombre d'or est défini en géométrie comme le rapport entre deux longueurs telles que le rapport de la somme des deux longueurs sur la plus grande, soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite, ie : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ avec $a > b > 0$. Ce nombre, noté φ est l'unique solution de l'équation $x^2 = x + 1$ et vaut $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

a. Dans un tableau recopier la feuille de calculs ci-dessous.

	A	B	C	D
1	n	F_n	F_{n+1}/F_n	
2	0	1		
3	1	1		
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			

b. Dans la colonne B calculer les premiers termes de la suite de Fibonacci.

c. Pour tout entier naturel n on note $Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Dans la colonne C calculer les premiers termes de la suite (Q_n) . Conjecturer alors son comportement quand n tend vers $+\infty$.

Dans la cellule D1, déterminer une valeur approchée du nombre φ . Que peut-on constater ?

Exercice 1. 45

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite (u_n) , appelée **suite de Syracuse**, définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a. Calculer les 10 premiers termes de la suite de Syracuse obtenue pour $a = 1$.
- b. Choisir un entier entre 2 et 6 et calculer les 10 premiers termes de la suite de Syracuse obtenue.
- c. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. a. Copier le script ci-dessous dans l'éditeur Python.

```
1- def syracuse(u) :
2-     if u%2==0 :
3-         u=u//2
4-     else :
5-         u=3*u+1
6-     return(u)
7-
8- def liste_syracuse(u) :
9-     L=[u]
10-    while u!=1 :
11-        u=syracuse(u)
12-        L=L+[u]
13-    return(L)
```

- b. Que renvoie syracuse(6) ? Par syracuse(7) ?

c. A quel test correspond $u\%2==0$?

d. Quel est le rôle de la fonction syracuse ?

3. a. Que retourne l'instruction `liste_syracuse(a)` où a est un entier non nul ?

b. Rechercher ce qu'on appelle la « conjecture de Syracuse » et pourquoi elle porte ce nom.

c. Choisir quatre entiers non nuls quelconques et utiliser la fonction `liste-syracuse`. Les résultats obtenus corroborent-ils la conjecture de Syracuse ?

4. On appelle **temps de vol** d'une suite de Syracuse l'indice du premier terme de la suite qui vaut 1. On appelle **altitude** de vol de la suite la valeur du plus grand terme de la suite.

a. Si $u_0 = 7$, quelle est la durée de vol de la suite et quelle est son altitude ?

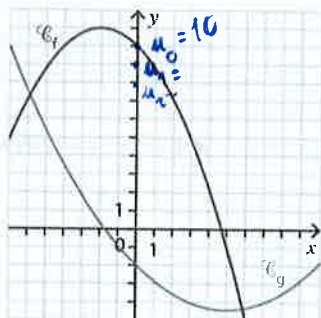
b. Ecrire un programme qui détermine la plus petite valeur de u_0 qui donne un temps de vol supérieur à 100.

c. Quelle est alors l'altitude de ce vol ?

Déterminer deux autres valeurs de u_0 qui donnent la même altitude.

3 Déterminer le sens de variation d'une suite**Exercice 1. 46** (Barbazo 38 p 33)

On a représenté graphiquement ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g .



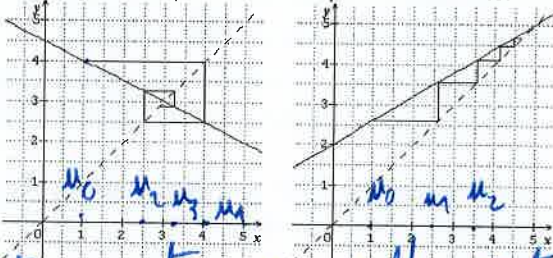
- Conjecturer graphiquement le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ pour tout entier naturel n .

Exercice 1. 47

Dans un repère orthogonal, on a représenté graphiquement la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

Dans chacun des cas, déterminer si la suite (u_n) semble converger. Lorsque c'est le cas préciser sa limite.



- h. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$
 i. $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 9$

Exercice 1. 50

À l'aide d'un quotient de termes déterminer les variations de la suite (u_n) , supposée strictement positive.

- a. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 70
 b. $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ 70
 c. $u_n = \frac{4n}{2^n}$
 d. $u_0 = 32$ et $u_{n+1} = 0,24u_n$
 e. $u_1 = 17$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
 f. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{n+4}{2n+1}u_n$

Exercice 1. 51

À l'aide d'une fonction déterminer les variations de la suite (u_n) .

- a. $u_n = 3n - \frac{1}{2}$
 b. $u_n = -n^2 + 10n + 1$
 c. $u_n = \sqrt{2n+1}$
 d. $u_n = 1 - \frac{2}{n}$

Exercice 1. 52 (Déclic 52 p 157)

Pour chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ (sauf mention du contraire) :

- ① conjecturer, à l'aide de la calculatrice, son sens de variations ;
 ② démontrer cette conjecture en utilisant la méthode la plus adaptée.

1. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ 2. $v_n = 4^{2n}$
 3. $w_n = 3 + 0,5^n$ 4. $t_n = \frac{n}{3^n}$
 5. $k_n = \frac{5}{n^3} - 4 \ (n \geq 1)$ 6. $\begin{cases} \ell_0 = 2 \\ \ell_{n+1} = \ell_n - \frac{1}{n^2 + 1} \end{cases}$

Exercice 1. 53 (Déclic 91 p 161)

Le tableau ci-dessous indique le taux de français possesseurs d'un smartphone entre 2012 et 2017.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Taux (en %)	28	39	46	58	65	73

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = -0,298n^2 + 10,512n + 27,93$$

On admet qu'elle permet d'obtenir une bonne modélisation de ce taux d'équipement pour l'année 2012 + n .

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (t_n) et les comparer aux taux réels.
 2. Étudier les variations de la suite (t_n) . Ce modèle est-il réaliste sur le long terme. Expliquer.
 3. À l'aide de la calculatrice, indiquer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, on peut estimer que le taux personnes possesseurs d'un smartphone dépassera 95 %.

Exercice 1. 54 (Belin 80 p 168)

Une entreprise fabrique des tablettes tactiles. Il a fallu investir 950 000 € pour la recherche et la mise en place de l'unité de production. La fabrication de chaque tablette engendre une dépense de 80 €.

On note n le nombre de tablettes fabriquées et C_n le coût total de fabrication de ces n tablettes.

1. Calculer $C_1, C_{10}, C_{10\,000}$, et plus généralement calculer C_n en fonction de n .

2. On note $f_n = \frac{C_n}{n}$ le coût moyen de fabrication de n tablettes : calculer f_n en fonction de n . Déterminer $f_1, f_{10}, f_{10\,000}$.

3. Soit (f_n) la suite des coûts moyens de fabrication. Étudier les variations de la suite (f_n) .

4. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer le nombre de tablettes à partir duquel le coût moyen de fabrication est inférieur à 1 000 €.

Exercice 1. 55 (Belin 79 p 168)

On veut étudier l'évolution d'une population de coccinelles, dont on admet que le nombre d'individus reste inférieur à un million.

L'effectif des coccinelles pour l'année n est exprimé en millions d'individus par un nombre réel u_n (u_n est alors compris entre 0 et 1). Si pour l'année 0, il y a 400 000 coccinelles, alors $u_0 = 0,4$.

On admet que l'évolution d'une année à l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie par $f(x) = kx(1-x)$, où k est un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).

1. On suppose que $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

- a. Afficher, avec une calculatrice, les dix premiers termes de la suite.

- b. Démontrer que la suite est décroissante. On admet que tous ses termes restent positifs.

2. a. Écrire un algorithme qui permet d'obtenir le terme de rang n de la suite (u_n) .

3. p désigne un entier naturel non nul que l'on peut choisir. Écrire un algorithme qui donne, en fonction de p , la plus petite valeur n_0 telle que, pour tout n supérieur à n_0 , $u_n < 10^{-p}$.

4. **Application** : Implémenter les algorithmes des questions précédentes en Python. Avec ce modèle, en combien d'années, ne resterait-il plus qu'une coccinelle ?

Exercice 1. 56 (Hatier 141 p 38)

On considère la suite (w_n) définie par $w_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = (n+1) \times w_n$.

On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n > 0$.

- a. À l'aide de la méthode la plus appropriée, déterminer la monotonie de la suite (w_n) .

- b. **PROGRAMMATION**  python

Écrire une fonction en Python de paramètre n qui renvoie la valeur de w_n .

Exercice 1. 57 (Hatier 143 p 38)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on pose :

$$s_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Calculer s_1 , s_2 et s_3 .
- Démontrer que la suite (s_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
- Pour tout nombre entier $k \geq 1$, justifier que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

- En déduire une expression simple de s_n .

Exercice 1. 58 (Déclic 88 p 160)

Vrai ou faux ? Justifier.

- Si une suite u est décroissante alors $u_1 \geq u_5$.
- Si une suite v est décroissante alors, pour tout rang n , on a $v_n \leq v_0$.
- Soit une suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
Si u est croissante alors f est croissante.
- Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et, pour tout entier n , $v_{n+1} = g(v_n)$ où g est définie par $g(x) = x - 4$. La suite v est croissante.

Exercice 1. 59 (Hatier 130 p 37)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

- Démontrer que si les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors la suite $(u_n + v_n)$ est croissante.
- Les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont définies sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \frac{n-5}{n}$, $b_n = \frac{n+3}{n}$ et $c_n = \frac{n+8}{n}$.
a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante et que les suites (b_n) et (c_n) sont décroissantes.
b. Prouver que la suite $(a_n + b_n)$ est croissante.
c. Prouver que la suite $(a_n + c_n)$ est décroissante.
- Si la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, alors peut-on donner le sens de variation de la suite $(u_n + v_n)$?

Exercice 1. 60 (Hatier 131 p 37)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et strictement croissante.

- Déterminer le sens de variation de la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2,8 \times u_n$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = -3,4 \times u_n$.
- Soit k un nombre réel. Recopier et compléter chacune des propriétés suivantes, puis la démontrer.
a. « Si k est ... et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. »
b. « Si k est ... et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. »

Exercice 1. 61 (Hatier 132 p 37)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes sont strictement positifs.

- Démontrer la propriété suivante.

« Si (u_n) est strictement croissante, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est strictement décroissante. »

Exercice 1. 62

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

La courbe C_f tracée dans le repère donné ci-dessous est celle de la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par :

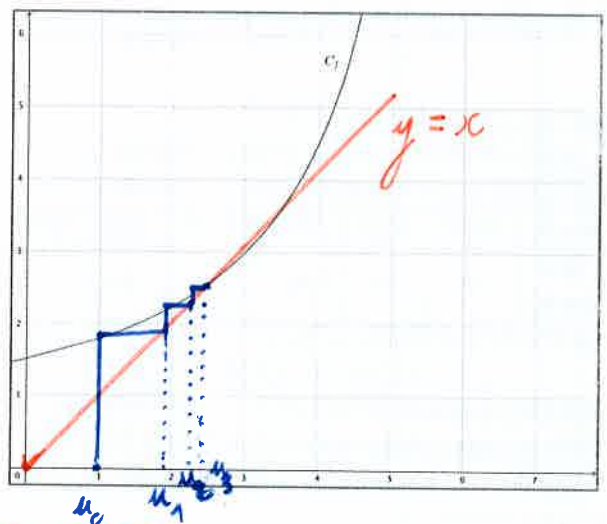
$$f(x) = \frac{9}{6-x}.$$

- A l'aide du graphique représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) . *qu'est-ce qu'on observe*
 - Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?
- Calculer u_1 et u_2 .
- On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.
a. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}.$$

c. En déduire le sens de variation de (u_n) .
- Compléter la fonction suivante, écrite en Python, renvoyant le premier entier n tel que $u_n \geq 2,99$.

```
1 def seuil():
2     u=1
3     n=0
4     while ...:
5         n=...
6         u=...
7     return(n..)
```

Handwritten notes: $u \leq 2.99$, $n+1$, $g(6-u)$, $n..$

**Exercice 1. 63**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

1 Suites numériques

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
4. A l'aide de la calculatrice déterminer le premier entier naturel n tel que $u_n > 0,4$.

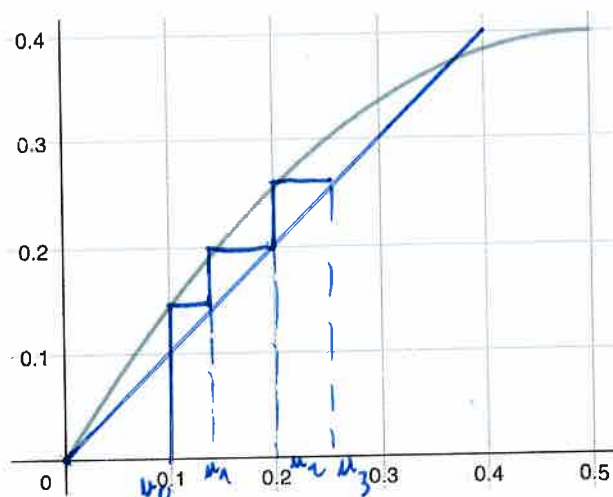
Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ?

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
 - a. Montrer que f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 - b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. On appelle α la solution non nulle de cette équation.
 - c. A l'aide de la courbe représentative de f donnée dans le repère ci-dessous, représenter les quatre premiers termes de la suite (v_n) .



- d. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (v_n) .
3. Soit g la fonction définie sur $[0; \alpha]$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$
 - a. Étudier le sens de variation de g sur $[0; \alpha]$.
 - b. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq \alpha$.

Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

4. On donne ci-dessous la fonction seuil écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

- a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
- b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35). Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 1. 64

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans l'exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes :

cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie. On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la manière suivante : $p_0 = 0,3$ et pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées des termes de la suite (p_n) .

	A	B
1	n	p_n
2	0	0.3
3	1	
4	2	
5	3	0.40769562
6	4	0.416351
7	5	0.42134371
8	6	0.42427137
9	7	0.42600433
10	8	0.42703578
11	9	0.42765169
12	10	0.42802018
13	11	0.42824089
14	12	0.42837313
15	13	0.42845251
16	14	0.42850009
17	15	0.42852863
18	16	0.42854575
19	17	0.42855602

- a. Quelle formule à recopier vers le bas, peut-on saisir en B3 pour calculer les termes de la suite (p_n) ?
- b. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 .
- c. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir

d'une bactérie de ce type ?

d. Formuler les conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

2. a. Etudier le signe du trinôme $0,7x^2 - x + 0,3$ sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq p_n \leq 0,5.$$

En déduire le sens de variation de la suite (p_n) .

3. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

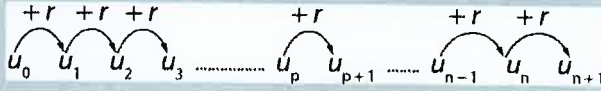
```
1 def suite(n):  
2     p= ...  
3     s=[p]  
4     for i in range( .):  
5         p= ...  
6         s.append(p)  
7     return(s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la suite(n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) .

2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 2. 1*suite arithmétique*

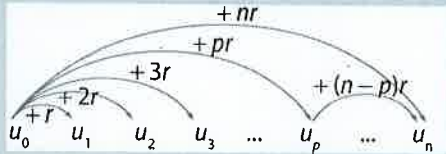
Une suite (u_n) est dite arithmétique si on passe d'un terme quelconque au suivant en ajoutant toujours le même nombre, c'est à dire s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n) .



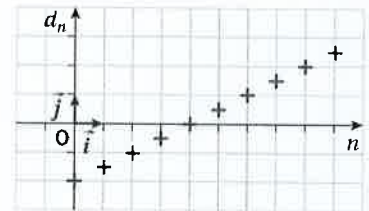
Dans la suite du cours (u_n) désigne une suite arithmétique de raison r .

Propriété 2. 1*expression de u_n en fct de n*

- Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$: $u_n = u_p + (n - p)r$.
- En particulier si u_0 est le premier terme de (u_n) alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_0 + nr$.

**Remarque**

- La réciproque est vraie : s'il existe r tel que pour tout entier n , $u_n = an + b$ alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.
- Si f est la fonction affine définie par $f(x) = rx + u_0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Ainsi, dans un repère, tous les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont alignés.

**Propriété 2. 2***sens de variation*

- si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante
- si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante

Propriété 2. 3*somme de termes*

- La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- La somme des termes d'indice 0 à n de la suite (u_n) est :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$
- La somme des termes d'indice p à n de la suite (u_n) est :

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

Remarque : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 2. 1

Parmi les suites suivantes déterminer celles qui sont arithmétiques et préciser, dans ce cas, leurs éléments caractéristiques (premier terme et raison).

a. $u_n = 5n - 2$

b. $u_n = n^2$

c. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -5 + u_n \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

Exemple 2. 2

Dans chacun des cas suivants (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{12} et u_{30} .

Existe-il un entier n tel que $u_n = 144$?

a. $u_0 = -8 ; r = 2$.

b. $u_5 = -2 ; r = -3$.

Exemple 2. 3

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 , telle que $u_1 + u_5 = 1$ et $u_2 + u_3 = 2$.

Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exemple 2. 4

Calculer la somme des 100 premiers termes de la suite définie dans l'exemple précédent.

Exemple 2.1:

Pour montrer que une suite est arithmétique:

- on montre que $u_{n+1} - u_n = \text{constante}$
 - $u_n = a \cdot n + b \Rightarrow (u_n)$ arithmétique de 1er terme b et de raison a
- Pour montrer que une suite n'est pas arithmétique:

- on peut montrer que $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$
- $u_{n+1} - u_n \neq \text{constante}$

a. de la forme $u_n = a \times n + b$
 donc arithm de :
 1er terme $u_0 = -2$
 raison $a = 5$

b. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2$
 $= \dots = 2n + 1$ pas constant
 donc pas arithmétique

Méthode 2: $u_1 - u_0 = 1^2 - 0^2 = 1$
 $u_2 - u_1 = 2^2 - 1^2 = 3 \neq 1$ donc pas arith

c. Arithm car de la forme $u_{n+1} = u_n + r$
 $r = -5$

d. Non

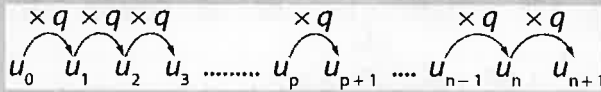
$$u_1 - u_0 = \left(\frac{1}{2} \times u_0 + 1\right) - 4 = 3 + 4 = -1$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \neq -1 \text{ donc pas arithm}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{5}{2}$$

Définition 2. 2*suite géométrique*

Une suite (u_n) est dite géométrique si on passe d'un terme quelconque au suivant en multipliant toujours par le même nombre, c'est à dire s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times q$. Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n) .

**Exemple 2. 5**

Parmi les suites suivantes préciser celles qui sont des suites géométriques et préciser, dans ce cas, leurs éléments caractéristiques (premier terme et raison).

a. $u_n = 2 \times 3^n$

b. $u_n = n^2$

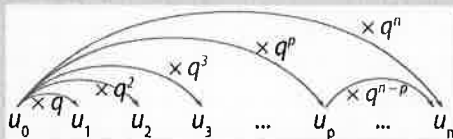
c. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3} \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

Dans la suite du cours (u_n) désigne une suite géométrique de raison q .

Propriété 2. 4*expression de u_n en fct de n*

- Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- En particulier si u_0 est le premier terme de (u_n) alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

**Exemple 2. 6**

Dans chacun des cas suivants (u_n) est une suite géométrique de raison q . Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_4 et u_7 .

a. $u_0 = 3$; $q = -2$.

b. $u_1 = 1$; $q = 3$.

c. $u_2 = -3$; $q = -2$.

Remarque : La réciproque est vraie : s'il existe q tel que pour tout entier n , $u_n = a \times q^n$ alors (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a$.

Propriété 2. 5*sens de variation de (q^n)*

- $q > 1 \Rightarrow (q^n)$ croissante ;
- $0 < q < 1 \Rightarrow (q^n)$ décroissante
- $q < 0 \Rightarrow (q^n)$ non monotone
- $q = 0$ ou $q = 1 \Rightarrow (q^n)$ constante

Exemple 2. 7

Etudier les variations de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q .

a. $q = 2$; $u_0 = 3$

c. $q = 0,5$; $u_0 = 3$

b. $q = -2$; $u_0 = 0,5$

d. $q = 0,5$; $u_0 = -3$

Remarque

- Si le premier terme de la suite (u_n) est positif alors (u_n) et (q^n) ont le même sens de variation.
- Si le premier terme de la suite (u_n) est négatif alors (u_n) et (q^n) ont des variations contraires.

Propriété 2. 6*somme de termes*

On suppose que $q \neq 1$.

- La somme des $n + 1$ premières puissances de q est :

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- La somme des termes d'indice 0 à n de la suite (u_n) est

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- La somme des termes d'indice p à n de la suite (u_n) est

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Exemple 2. 8

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 4^n$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et

exprimer $\sum_{i=1}^n u_i$ en fonction de n .

2. Soit (v_n) la suite de terme général $u_n = (-3)^n$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et

exprimer $\sum_{i=0}^{n+1} u_i$.

Remarque : La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par : 1^{er} terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

Exemple 2.5:

a. $U_n = 2 \times 3^n$

raison $\rightarrow 3^n$ 1^{er} terme $\rightarrow 2$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{2 \times 3 \times 3^n}{2 \times 3^n} = 3$$

b. $U_n = n^2$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3 U_n \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

c.

d.

$$81 \times 9 = 729$$

Exemple 2.6:

a. $U_4 = U_0 \times (-2)^4$
 $= U_0 \times (-16)$
 $= 3 \times (-16)$
 $= -48$

$$\begin{aligned} U_7 &= U_0 \times (-2)^7 \\ &= 3 \times (-128) \\ &= -384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \times 3 \\ 3 \times 3 \end{aligned}$$

b. $U_4 = U_1 \times 3^{4-1}$
 $= 1 \times 3^3$
 $= 1 \times 27$
 $= 27$

$$\begin{aligned} U_7 &= U_1 \times 3^{7-1} \\ &= 1 \times 3^6 \\ &= 729 \end{aligned}$$

c. $U_4 = U_2 \times (-2)^{4-2}$
 $= -3 \times (-2)^2$
 $= -12$

$$\begin{aligned} U_7 &= U_2 \times (-2)^{7-2} \\ &= -3 \times (-2)^5 \\ &= 96 \end{aligned}$$

Exemple 2.7:

1. $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$ $U_1 = 4^1 = 4$
 $U_n = U_1 \times \frac{1-4^n}{1-4}$

2. $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n} = \frac{(-3)^n \times (-3)}{(-3)^n} = -3$ $U_0 = 4 \times \frac{1-4^n}{1-4}$

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0 \times q^0 \\ &= 0 \text{ ou } 3^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_i = U_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = 1 \times \frac{1-(-3)^{n+2}}{1-(-3)}$$