

D1 Calcul du terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1. Vérifier successivement les égalités suivantes : $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$ et $u_3 = u_0 + 3r$.

On pourrait généraliser ces premiers exemples mais la démonstration de cette généralisation nécessite un type de raisonnement vu en Terminale. Il est proposé ici une autre démonstration reposant sur un théorème admis.

2. Soit n un entier naturel. On pose : $v_n = u_0 + nr$. Le but est de démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = v_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. On admet le résultat suivant : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme v_0 et par $v_{n+1} = f(v_n)$ est unique.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$.

CORRIGÉ

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Si $n=0$, alors $u_1 = u_0 + r$. Si $n=1$, alors $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$.

Si $n=2$, alors $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$.

2. a. $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = (u_0 + nr) + r = v_n + r$.

b. On a $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$. Donc les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

Soit n un entier naturel. D'après la question 2. a., on a $v_{n+1} = v_n + r$. Donc $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + r$.

On a aussi, par hypothèse, $u_{n+1} = u_n + r = f(u_n)$ car (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Donc on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_0 = u_0$.

D'après le résultat admis, par unicité, on a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = v_n$.

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

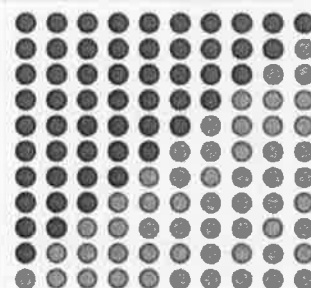
D2 Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.**1. Étude de quelques cas particuliers avant la démonstration**

a. Dans la figure ci-contre, en comptant le nombre de jetons rouges de deux manières différentes, montrer que : $1 + 2 + \dots + 10 = 55$.

b. Par un raisonnement similaire, déterminer la valeur de $1 + 2 + \dots + 100$.

2. Démonstration du cas général

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 1., calculer $1 + 2 + \dots + n$.

**CORRIGÉ**

1. a. Sur la figure de l'énoncé, en partant de la droite et en comptant les jetons rouges par colonne, on trouve qu'il y a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ jetons rouges.

L'ensemble des jetons (rouges ou bleus) forme un rectangle de 10 colonnes et 11 lignes : il y a donc 10×11 jetons au total. De plus, par symétrie, il y a autant de jetons rouges que de bleus, donc il y a $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ jetons rouges. Donc $1 + 2 + \dots + 10 = 55$.

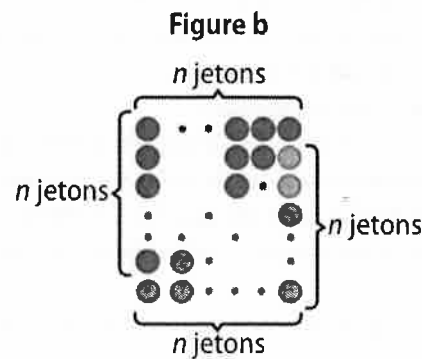
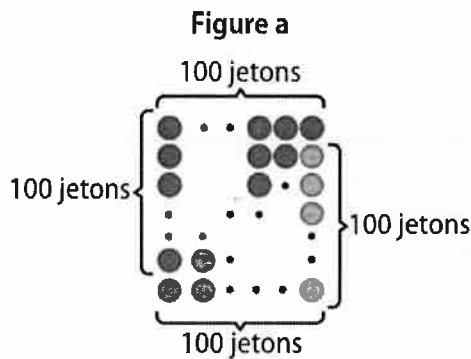
b. En adaptant la figure de l'énoncé pour 100 jetons (voir Figure a ci-après), en comptant par colonne, on trouve qu'il y a $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ jetons rouges.

L'ensemble des jetons forme un rectangle de 100 colonnes et 101 lignes : il y a donc 100×101 jetons au total. Comme il y a autant de jetons rouges que de bleus, il y a $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ jetons rouges. Donc $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$.

2. En adaptant la figure de l'énoncé pour n jetons (voir Figure b, ci-dessous), on trouve, en comptant par colonne, qu'il y a $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jetons rouges.

De plus, les jetons bleus et rouges forment un rectangle de $n \times (n+1)$ jetons, donc il y a $\frac{n \times (n+1)}{2}$ jetons rouges.

$$\text{Donc } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



D3 Calcul du terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

Soit n un entier naturel. On pose : $v_n = q^n u_0$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. On admet le résultat suivant : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme v_0 et par $v_{n+1} = f(v_n)$ est unique.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = q^n u_0$.

CORRIGÉ

a. $v_{n+1} = q^{n+1} u_0 = q \times q^n u_0 = q \times v_n$.

b. On a $v_0 = q^0 u_0 = u_0$. Donc les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

Soit n un entier naturel. D'après la question a., on a $v_{n+1} = q v_n$. Donc $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = qx$.

On a aussi, par hypothèse : $u_{n+1} = q u_n = f(u_n)$ car (u_n) est une suite géométrique de raison q .

Donc on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_0 = u_0$.

D'après le résultat admis, par unicité, on a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = v_n$.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

D4 Calcul de $1 + q + \dots + q^n$

Soit q un réel différent de 1 et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Posons : $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

a. Montrer que $S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$.

b. En déduire que $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

a. $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ et $q S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$.

On soustrait les deux égalités membre à membre et on regroupe les termes opposés :

$$S_n - q S_n = 1 + (q - q) + (q^2 - q^2) + (q^3 - q^3) + \dots + (q^n - q^n) - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

b. $S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$ donc $(1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$.

Puisque $q \neq 1$, on obtient : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

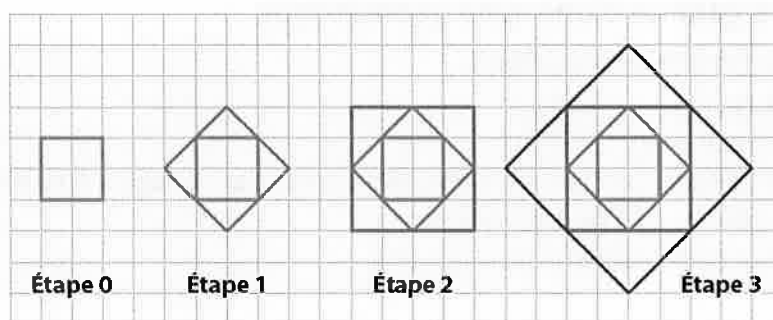
Activité 1 : introduire la notion de suite arithmétique

On a peut-être découvert du pétrole au large du Brésil ! Une compagnie nationale d'hydrocarbures a mandaté une société de forage pour atteindre la nappe potentielle. La plateforme d'exploration coûte 10 million d'euros. Le coût du forage est fixé à 0,1 millions d'euros par mètre creusé. On pose pour tout entier naturel n non nul p_n le coût en millions d'euros pour creuser n mètres. On a donc $p_0 = 10$ et $p_1 = 10,1$.

1. Donner les valeurs de p_2 et p_3 . Que représentent-elles ?
2. Déterminer les valeurs de $p_{15} - p_{14}$ et $p_{16} - p_{15}$.
3. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
4. Pour attirer les investisseurs, le gouvernement brésilien décide de prendre à sa charge le coût de la plateforme. La société de forage n'assumera donc que les coûts liés à la main d'œuvre.
Quelle somme déboursa-t-elle pour forer 3 999 m ? Et pour forer n mètres ?
5. Dédurre de la question précédente l'expression de p_n en fonction de n .

Activité 2 : introduire la notion de suite géométrique

Ulysse cherche à construire des figures sur une feuille à petits carreaux standards. En partant d'un carré simple, il en crée un nouveau dont les milieux des côtés sont les sommets du carré précédent, et ainsi de suite, selon le schéma ci-dessous.



On choisit un petit carreau comme unité d'aire la suite de tout l'exercice.

1. a. Donner l'aire du carré à l'étape 0.
b. Montrer sans calcul que l'aire à l'étape 1 est 8.
c. Déterminer l'aire des nouveaux carrés obtenus aux étapes 2 et 3.
2. Pour tout entier naturel n , on appelle u_n la valeur de l'aire du carré à l'étape n . Ainsi $u_0 = 4$. Donner les trois termes suivants de la suite (u_n) .
3. Conjecturer une relation entre les termes u_{n+1} et u_n .
4. Une telle suite est appelée suite géométrique. La raison de cette suite est le nombre par lequel on multiplie un terme donné pour passer au terme suivant de la suite.
a. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
b. Utiliser la formule précédente pour calculer u_{33} .
5. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'après exécution, la variable N contienne le nombre d'étapes nécessaires pour que l'aire du carré soit égale à 1 024.

```

A ← ...
N ← ...
Tant que .....
  A ← ...
  N ← ...
Fin Tant que
  
```

1 Suite arithmétique

Exercice 2. 1 (75 p 89)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 13$ et de raison $r = -5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le quinzième terme de cette suite.
2. Étudier les variations de (u_n) .
3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$.

Exercice 2. 2 (83 p 90)

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_1 = 5$.

1. Déterminer le treizième terme de la suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
3. À partir de quel rang les termes u_n sont-ils supérieurs à 1 000 ?
4. Pour quelles valeurs de n le terme u_n est-il compris entre 500 et 1 000 ?

Exercice 2. 3 (77 p 90)

Les suites ci-dessous sont définies sur $\mathbb{N}$. Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant. Pour tout entier naturel n :

- a. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n \\ u_0 = 2 \end{cases}$
- c. $u_n = -5n + 3$ d. $u_n = n^2 - 2n + 1$

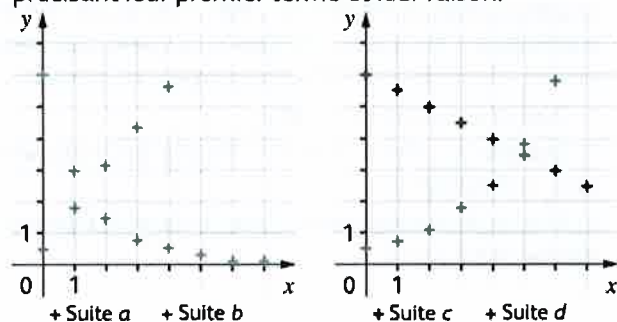
Exercice 2. 4

Dans chaque cas préciser si la suite (u_n) est arithmétique. Lorsqu'elle l'est, préciser sa raison et son premier terme.

- a. $u_n = -4n + 6n^2$ b. $u_n = -4n + 5$
- c. $\begin{cases} u_{n+1} = 6 + u_n \\ u_0 = 3 \end{cases}$ d. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{u_n} + 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}$

Exercice 2. 5 (Déclic 61 p 159)

Parmi les quatre suites a , b , c et d représentées ci-dessous, indiquer celles qui sont arithmétiques en précisant leur premier terme et leur raison.

**Exercice 2. 6** (Déclic 107 p 163)

On considère la suite arithmétique (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$, telle que $u_{12} = 52$ et $u_{23} = 107$.

1. Calculer la raison r de la suite.
2. Calculer le terme initial u_0 .
3. Calculer u_{55} .
4. Déterminer le sens de variation de la suite.
5. Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Exercice 2. 7 (88 p 91)

Compléter l'algorithme ci-contre pour que la liste L contienne en fin d'algorithme, les termes $u_0, u_1, \dots, u_N$ d'une suite arithmétique de raison r .

```

U ← u₀
L ← [...]
Pour i variant de ... à ...
    U ← ...
    L ← ... + [...]
Fin Pour

```

Exercice 2. 8 (79 p 90)

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 12$ et de raison 7. On a créé la feuille de calcul ci-contre. La valeur de u_0 est entrée dans la cellule B2.

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	0	12	12
3	1	19	
4	2	26	
5	3	33	

1. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?
2. La valeur de u_0 est entrée dans la cellule C2. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule C3 pour obtenir la somme $u_0 + \dots + u_n$ pour chaque valeur de n ?

Exercice 2. 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

1. a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .
b. Cette suite est-elle arithmétique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
a. Déterminer les trois premiers termes de (v_n) .
b. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
3. a. Exprimer $v_0 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de n .
b. Exprimer $v_0 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de u_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2. 10 (CQFD 75 p 70)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$

et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

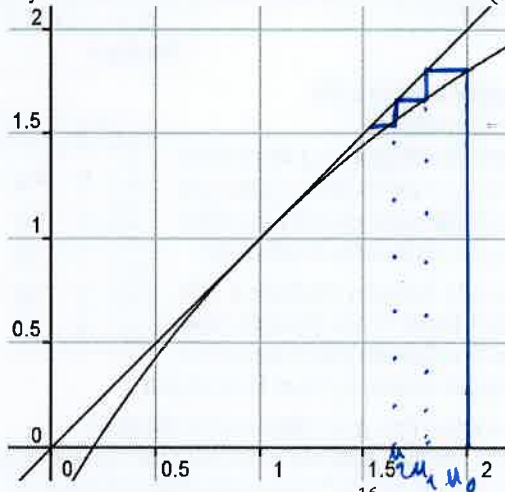
On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
a. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{6}$.
b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
c. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$.
d. En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier n .
4. Déterminer une expression de u_{100} .

Exercice 2. 11

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

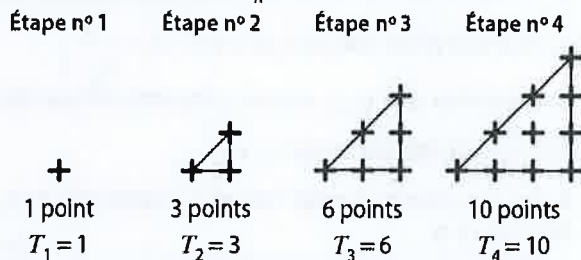
- Sur le graphique ci-dessous on a représenté la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$.
- Représenter les trois premiers termes de la suite (u_n) .
 - Conjecturer le sens de variation et la limite l de (u_n) .



- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$.
- Montrer, que si $1 < u_n \leq 2$ alors $1 < u_{n+1} \leq 2$.
Pour la suite de l'exercice on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n \leq 2$.
- Établir la relation $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.
 - En déduire le sens de variation de (u_n) .
- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Justifier l'existence de v_n pour tout entier n .
 - Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$.
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $|u_n - l| < 10^{-5}$.
 - Proposer un algorithme qui, pour un réel strictement positif ε en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 2. 12 (86 p 90)

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres triangulaires » T_n .



Ainsi T_4 est le quatrième nombre triangulaire et vaut 10. Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de points situés soit à l'intérieur soit au bord du triangle obtenu à la n -ième étape.

1. Donner la valeur de T_5 et de T_6 .

2. a. Construire les triangles des étapes n° 5 et 6.

b. Justifier l'égalité $2 \times T_6 - 6 = 36$.

c. Sans faire la figure, justifier l'égalité $2 \times T_{20} - 20 = 20^2$.

d. Justifier que, pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. **Autre méthode** : on appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par le nombre de points qu'on ajoute à la figure à l'étape n .

a. Donner u_1, u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner ses caractéristiques.

d. Exprimer T_n en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_n$. Retrouver le résultat de la question 2. d.

4. 2019 est-il un nombre triangulaire ?

Exercice 2. 13 (84 p 90)

On veut creuser un puits. Le 1^{er} mètre coûte 100 €, le 2^e mètre 120 €, le 3^e mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. On note un le prix du n -ième mètre creusé.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. a. Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$.

b. En déduire le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur.

3. On dispose d'un budget de 33 000 €.

Quelle profondeur maximale du puits peut-on creuser ?

Exercice 2. 14 (85 p 90)

La croissance du fœtus

est surveillée par échographie.

Quand il est trop grand pour

être visualisé complètement,

on mesure le **diamètre**

bipariétal (l'écartement entre

les deux os qui se trouvent de chaque côté de la face).

On admet qu'à partir de la 11^e semaine, le diamètre bipariétal

augmente chaque semaine de 2 mm et qu'il vaut 24 mm

à la fin de la 11^e semaine. On note u_n sa valeur, exprimée

en mm, à la fin de la $(n + 11)$ -ième semaine de grossesse.

1. Donner u_0 . Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

3. Au bout de combien de semaines, le diamètre bipariétal dépassera-t-il 5 cm ?



2 Suites géométriques

Exercice 2. 15 (89 p 90)

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n et calculer le dixième terme de cette suite.
2. Étudier les variations de (v_n) .
3. a. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \dots + v_8$.
b. Calculer la somme $S' = v_1 + v_2 + \dots + v_9$.

Exercice 2. 16 (Déclic, 64 p 158)

Pour chaque suite, indiquer si elle est géométrique (en précisant sa raison) ou non.

1. $u_n = 5n^2$
2. $v_n = 3 \times 4^n$
3. $w_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$
4. $\begin{cases} t_0 = -2 \\ t_{n+1} = t_n + 2^n \end{cases}$
5. $k_n = \frac{4 \times (-5)^n}{3}$
6. $\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = -3z_n \end{cases}$

Exercice 2. 17

Pour chaque suite dire si elle est géométrique (en précisant sa raison) ou non

- a. $u_n = 6n - 2n^2 + 1$
- b. $u_n = \frac{4}{3^n}$
- c. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n}{5} \\ u_0 = -1 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 3 \\ u_0 = 4 \end{cases}$

Exercice 2. 18 (Déclic, 120 p 164)

Soient u , a et b les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5 \times 2^n - 3n + 1, a_n = 5 \times 2^n \text{ et } b_n = -3n + 1$$

1. Quelle est la nature des suites a et b ? Justifier.
2. Calculer et exprimer en fonction de n les sommes $S_1 = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ et $S_2 = b_0 + b_1 + \dots + b_n$.
3. Calculer alors la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 2. 19 (Ilelivrescolaire 71 p 36)

Dans chaque cas, on considère deux termes d'une suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$.

Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_3 = 6$ et $v_8 = 1458$
2. $v_6 = -18$ et $v_{12} = -\frac{9}{32}$
3. $v_{10} = 15$ et $v_{15} = 46875$
4. $v_{21} = 65536$ et $v_{23} = 262144$

Exercice 2. 20 (95 p 90)

Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

1. a. Calculer les distances d_1, d_2 et d_3 .
b. Donner l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n .
c. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .

2. Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.

3. Justifier que $L_n < 5\,000$ pour tout n . Que dire du pari du globetrotter ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

Exercice 2. 21 (97 p 91)

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est de 1 013 hectopascals.

On suppose que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.

On note p_n la pression atmosphérique en hectopascals à l'altitude $100n$ en mètres. On a donc $p_0 = 1\,013$. On arrondira tous les résultats à l'unité.

1. Calculer les pressions p_1 et p_2 aux altitudes 100 et 200 m.
2. Écrire p_{n+1} en fonction de p_n pour tout entier naturel n . Que peut-on en déduire sur la suite (p_n) ?
3. Exprimer p_n en fonction de n .
4. Calculer la pression atmosphérique à l'altitude 3 200 m.
5. Calculer à partir de quelle altitude (à 100 m près) la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascals.

Exercice 2. 22 (100 p 91) *algorithmique, somme*

On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 7. Compléter le programme ci-contre afin que la fonction Python retourne la somme $u_0 + \dots + u_{100}$.

```
def suite_somme():
    2   U=5
    3   S=...
    4   for i in range(...):
    5       U=...
    6       S=...
    7   return(S)
```

Exercice 2. 23 (101 p 91) *algorithmique, recherche de rang*

La désintégration de l'atome de radium produit un gaz appelé radon qui, lui-même, se désintègre au cours du temps en perdant 16,5 % de sa masse chaque jour. On considère qu'au début de l'expérience, on dispose d'un gramme de radon. On désigne par u_n la masse de radon au bout du n -ième jour. On a donc $u_0 = 1$.



1. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
2. De quelle valeur semblent se rapprocher les termes u_n lorsque n devient grand ?
3. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle retourne le premier terme de la suite inférieur ou égal à 10^{-6} ainsi que l'indice de ce terme.

```
03_Indi~.py 008/008
def radon():
    u=1
    n=0
    while ...:
        u=...
        n=...
    return(n,u)
```

Exercice 2. 24 (119 p 100) *algorithmique, listes*

On considère des listes de nombres définies de la manière suivante :

Étape 0 $\rightarrow L_0 = (1)$

Étape 1 $\rightarrow L_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Étape 2 $\rightarrow L_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Étape 3 $\rightarrow L_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

On obtient chaque liste en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. a. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle la liste L_n contient plus de 2 020 éléments ?

b. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie le 2 020^e élément de L_n où n est l'entier déterminé à la question 1.a..

```
1 def list():
2     L=[1]
3     for k in range(...):
4         U=[i*0.5 for i in L]
5         L=L+...
6     return(L[...])
```

2. Pour tout entier naturel n , on appelle u_n le dernier élément de la liste L_n .

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n . Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

b. Que peut-on conjecturer sur la limite de (u_n) ?

Exercice 2. 25 (Sujet C p 99)

Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1 . Extérieurement au triangle OA_0A_1 , on construit sur le côté $[OA_1]$ un triangle OA_1A_2 rectangle isocèle en A_2 .

1. On pose $OA_0 = 1$. Démontrer

que : $OA_1 = A_0A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. On réitère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèles. Si $OA_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n , on trace alors extérieurement à celui-ci le triangle OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1} .

a. Déterminer une relation entre les longueurs OA_{n+1} et OA_n .

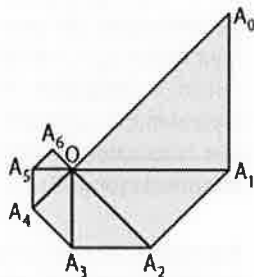
b. On pose pour tout entier naturel n , $u_n = OA_n$.

Déterminer la nature de la suite (u_n) et exprimer son terme général en fonction de n .

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée $OA_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ c'est-à-dire : $L_n = OA_0 + A_0A_1 + \dots + A_{n-1}A_n$.

a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n .

b. Conjecturer la limite de la suite (L_n) .

**Exercice 2. 26** (104 p 92)

Pour placer un capital de 5 000 €, on a le choix entre deux formules :

A. Formule de placement à prime constante : chaque année, le capital est augmenté de 250 €.

On appelle C_n le capital disponible après n années.



B. Formule de placement à taux d'intérêt fixe à 4 % par an : chaque année, le capital est augmenté de 4 % par rapport à l'année précédente. On appelle K_n le capital disponible après n années.

Répondre aux questions suivantes pour chacune des suites (C_n) et (K_n) .

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.

2. Exprimer le terme de rang $n + 1$ en fonction du terme de rang n . Que peut-on en déduire pour la suite ? Préciser la raison.

3. Donner l'expression en fonction de n du capital disponible après n années de placement.

4. Calculer le capital disponible après 6 années de placement.

5. Après combien d'années le capital aura-t-il doublé ? Cette durée dépend-elle du montant du capital initial ?

Exercice 2. 27

Un patron propose à ses employés, au choix de chacun, trois modes d'augmentation de leur salaire mensuel au premier janvier de chaque année :

Contrat A : une augmentation fixe du salaire mensuel de 50 €.

Contrat B : une augmentation de 3,5 % du salaire mensuel de l'année précédente.

Contrat C : une augmentation de 2 % du salaire mensuel de l'année précédente à laquelle s'ajoute une augmentation fixe de 20.

Au premier janvier 2002 le salaire mensuel des employés est de 1 200 €.

On note respectivement u_n , v_n et w_n les salaires mensuels des contrat A, B et C l'année 2002 + n .

Contrat A

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .

c. Exprimer u_n en fonction de n . En déduire le salaire mensuel en 2011.

d. Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .

En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.

2. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules B4 et C4 ? Compléter les colonnes B et C.

Contrat B

1. a. Calculer v_1 et v_2 .

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .

c. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire le salaire mensuel en 2011.

d. Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .

En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.

2. Quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules D4 et E4 ? Compléter les colonnes D et E.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Contrat A		Contrat B		Contrat C	
2	n	Salaire mensuel	Salaire cumulé	Salaire mensuel	Salaire cumulé	Salaire mensuel	Salaire cumulé
3	0	1 200	14 400	1 200	14 400	1 200	14 400

4	1						
5	2						
6	3						
7	4						
8	5						
9	6						
10	7						
11	8						
12	9						

Contrat C

- Calculer w_1 et w_2 .
 - La suite (w_n) peut-elle être arithmétique ? géométrique ?
 - Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n .
 - On définit la suite (t_n) en posant, pour tout entier naturel n , $t_n = w_n + 1000$.
Montrer que (t_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire l'expression de w_n en fonction de n , puis le salaire mensuel en 2011.
 - Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .
En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.
2. Quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules F4 et G4 ? Compléter les colonnes F et G.

Exercice 2. 28 (102 p 91) *suite arithmético-géométrique*
Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \text{ et } u_0 = 0.$$

- Calculer $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{100}$ dans un tableur.
 - Conjecturer la limite de (u_n) .
 - La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
- En exprimant v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n , démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Donner l'expression de v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. a. À l'aide d'un programme ou du tableur, calculer des termes de la suite (v_n) pour de grandes valeurs de n .
b. Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la suite (v_n) ? Cette deuxième conjecture semble-t-elle cohérente avec celle faite à la question 1. b. ?

Exercice 2. 29 (118 p 100) *suite arithmético-géométrique*

La bactérie *E. Coli* pourrait permettre de produire du bio-carburant par modification génétique. L'expérimentation montre que dans un milieu nutritif optimisé, la masse de bactéries augmente de 20 % par jour. On démarre la production avec 1 kilogramme de bactéries. Chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif et on prélève un échantillon de bactéries pour suivre la modification génétique. Ces opérations retirent 100 grammes de bactéries de la cuve. On souhaite produire 30 kilogrammes de bactéries.



1. On modélise l'évolution de la population de bactéries par une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n , u_n est la masse de bactéries en grammes n jours après le début de l'expérimentation.

- Donner u_0 .
 - Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
2. Écrire une fonction Python retournant le nombre de jours nécessaires pour atteindre l'objectif.
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 500$.
- Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Conjecturer la limite de (u_n) .
- Le modèle choisi vous paraît-il réaliste ?

Exercice 2. 30 (Déclic, 124 p 165) *suite homographique*
On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite et sa limite éventuelle.
- Calculer u_1 et u_2 . Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
- On admet que u est positive et on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2} \quad (*)$$

- Calculer les premiers termes de v puis conjecturer la nature de la suite v . Démontrer cette conjecture.
- En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} - 2$$

En déduire une expression de v_n en fonction de n . Justifier alors que u bien une suite convergente.

Exercice 2. 31 (lelivrescolaire 86 p 38)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

- Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
 - Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.
 - En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
 - Calculer s_0, s_1 et s_2 . Que peut-on conjecturer ?
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
- En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n .
- Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

- a. $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 b. $W_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

Exercice 2. 32

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Montrer que $v_0 = 1$.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c. En déduire que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n .

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Montrer que $w_0 = -1$.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c. En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$w_{n+1} = w_n + 2.$$

d. Exprimer w_n en fonction de n .

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. a. En utilisant la question précédente démontrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $u_n > 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2n-3}{2^{n+1}}.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

d. En utilisant la calculatrice déterminer le premier entier naturel n_0 à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ sont inférieurs à 0,01. Justifier.

e. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

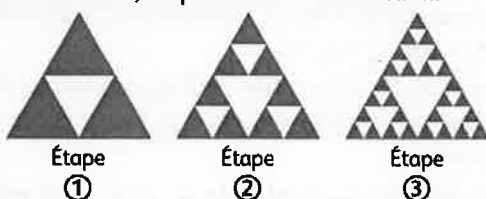
f. Proposer un algorithme demandant un réel $\varepsilon > 0$ en entrée et donnant en sortie le premier entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n < \varepsilon$.

Exercice 2. 33 (Déclic 136 p 169) triangles de Sierpinski

On partage un triangle équilatéral bleu, de 10 cm de côté, en quatre triangles équilatéraux en traçant les segments joignant les milieux des côtés de ce triangle. On blanchit le triangle central.

Chaque petit triangle bleu est alors partagé en quatre triangles selon la même procédure que précédemment et on blanchit le triangle central.

Et ainsi de suite, on poursuit la construction.



À l'étape n , où n est un entier non nul, on note :

- u_n le nombre de nouveaux triangles blanchis ;
- p_n le périmètre d'un nouveau triangle blanchi ;

- a_n l'aire d'un triangle blanchi.

On rappelle que :

- la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est égale $\frac{c\sqrt{3}}{2}$;

- lorsque des longueurs sont multipliées par un réel k , alors les aires sont multipliées par k^2 .

Partie A. Étude d'un nouveau triangle blanchi

1. Déterminer u_1 , p_1 et a_1 .

2. Comment obtenir u_2 , p_2 et a_2 à partir de u_1 , p_1 et a_1 ? puis u_3 , p_3 et a_3 à partir de u_2 , p_2 et a_2 ?

3. a. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_{n+1} en fonction de u_n , puis p_{n+1} en fonction de p_n et enfin a_{n+1} en fonction de a_n .

b. En déduire la nature de chacune des suites (u_n) , (p_n) et (a_n) .

c. Exprimer u_n , p_n puis a_n en fonction de n .

Partie B. Somme de périmètres

Pour tout entier $n \geq 1$, on note S_n la somme des périmètres des nouveaux triangles blanchis au cours de l'étape n .

1. Exprimer S_n en fonction de u_n et p_n .

2. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = 10 \times 1,5^n$$

3. À l'aide de la calculatrice :

a. déterminer à partir de quelle étape n la somme S_n dépasse 1 m, puis 10 km ;

b. conjecturer les limites éventuelles des suites (u_n) , (p_n) et (S_n) .

Partie C. Somme des aires

Pour tout entier $n \geq 1$, on note S'_n la somme des aires des nouveaux triangles blanchis au cours de l'étape n .

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S'_n = \frac{25\sqrt{3}}{4} \times 0,75^{n-1}$$

2. Quelle est la nature de la suite (S'_n) ?

3. Conjecturer la limite éventuelle de la suite (S'_n) .

4. Commenter les limites des suites (S_n) et (S'_n) .

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n la somme totale des aires de tous les triangles blanchis au cours des n étapes.

a. Intuitivement, vers quelle valeur tend la suite (T_n) ? Justifier.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$T_n = 25\sqrt{3}(1 - 0,75^n)$$

c. À l'aide de la calculatrice, retrouver la conjecture de la question 5. a.

Exercice 2. 34 (TS, Liban, mai 2019)

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n ième semaine ».

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2 .

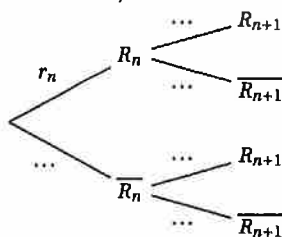
b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n ième semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

d. Calculer la limite de la suite (r_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2. 35 (TS, Liban, mai 2018)

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

– Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;

– Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;

– La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la n ième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.