

3 Second degré

1 Fonctions polynômes du second degré

Définition 3.1

fonction polynôme du 2nd degré

Une fonction polynôme du second degré (ou de degré 2) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression algébrique peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Remarque : On admet que l'écriture $ax^2 + bx + c$ est unique. Cette expression, appelée trinôme du second degré, est la forme développée de $f(x)$. Les réels a, b et c sont appelés coefficients de la fonction polynôme.

Propriété 3.1

forme canonique

Pour toute fonction polynôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, il existe deux nombres réels uniques α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Cette écriture est la forme canonique de f .

Remarque : le terme « canonique » qualifie l'expression censément naturelle, qui facilite les manipulations ultérieures. Elle permet en effet ici de démontrer rapidement les deux propriétés suivantes.

Exemple 3.2

- Donner la forme canonique des fonctions :
 - $f_1: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 8x + 9$;
 - $f_2: x \in \mathbb{R} \mapsto -2x^2 + 6x + 1$.
- Proposer un algorithme demandant trois réels a, b et $c, a \neq 0$ en entrée et retournant deux réels α et β tels que $a(x - \alpha)^2 + \beta$ soit la forme canonique de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété 3.2

variations

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré et $a(x - \alpha)^2 + \beta$ sa forme canonique.

Si $a > 0$: le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$\nearrow$

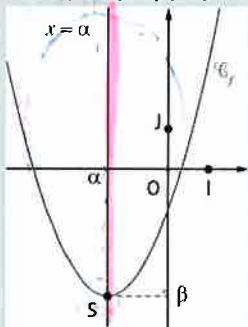
β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en α

Si $a < 0$: le tableau de variation de f est :

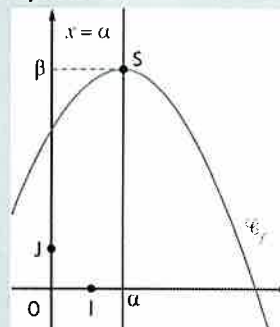
x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$\searrow$

β est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en α

Dans les deux cas, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, qui admet la droite $\Delta: x = \alpha$ pour axe de symétrie.



Si $a > 0$:
on dit que les branches de la parabole sont tournées vers le haut



Si $a < 0$:
on dit que les branches de la parabole sont tournées vers le bas



1. Etudier les variations des fonctions $f_1: x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^2 + 8x - 1$ et $f_2: x \mapsto -x^2 + 2x + 2$.

Exemple 3.3

- Proposer un algorithme demandant trois réels a, b et $c, a \neq 0$ et retournant les variations de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ ainsi que la valeur de son extrémum et la valeur en laquelle il est atteint.
- Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = -7x^2 + 28x + 3$. Donner les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$ et une équation de son axe de symétrie.

Exemple 1 :

1. Pour répondre aux questions on regarde si l'expression de la fonction peut-être écrite sous la forme $ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a. Soit $x \in \mathbb{R}$

important de dire c'est quoi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -x^3 + x^2(x+1) + 2 \\ &= -x^3 + x^3 + x^2 + 2 \\ &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 = \sqrt{1} \text{ ou } -\sqrt{1}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (2x+1)^2 - 4x^2 \\ &= (2x+1+2x)(2x+1-2x) \\ &= (4x+1)(1) \end{aligned}$$

Par de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ donc pas second degré

c. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 3x^2 - 12x + 7x \\ &= 3x^2 - 5x \text{ oui!} \end{aligned}$$

2. Méthode 1: par identification

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$\text{on regroupe } \Rightarrow = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

les termes de x

Par unicité de la forme développée d'un polynôme on peut identifier les coef

$$ax^2 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$1x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$a=1$$

$$b-a=2$$

$$c-b=-1$$

$$-c=-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2+a=3 \\ c=2 \end{cases}$$

Méthode 2: avec une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 + 3x + 2 \\ \hline 3x^2 - x - 2 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 2x - 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et factorisation d'un trinôme du second degré

Soit f une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Définition 3. 2

équation du second degré, racine de f , discriminant

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x est appelée équation du second degré.
- On appelle racine de f toute solution λ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est à dire tout nombre λ tel que $f(\lambda) = 0$.
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété 3. 3

résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

- Le nombre Δ est appelé discriminant car il permet de distinguer, ou discriminer, différents cas possibles.
- Lorsque a et c sont de même signe on a $\Delta \geq 0$ donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
- Lorsque $b = 0$ ou que $c = 0$ on peut déterminer les solutions sans utiliser la propriété précédente (cf ex 3. 4, 1.d et 1.e)

Exemple 3. 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-x^2 - x + 2 = 0$;

c. $3x^2 - 2x + 1 = 0$;

e. $3 - x^2 = 0$.

b. $18x^2 + 24x + 8 = 0$;

d. $5x^2 + x = 0$;

2. Proposer un algorithme renvoyant les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Propriété 3. 4

factorisation

Si $\Delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Exemple 3. 5

Factoriser les trinômes suivants :

$A(x) = 2x^2 + x - 1$

$C(x) = x^2 - 5$

$B(x) = -2x^2 + 16x - 32$

$D(x) = 3x^2 - 2x$

Remarque

- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 sont qualifiés de racines simples, ou d'ordre 1. Si $\Delta = 0$ on dit que x_0 est racine double, ou d'ordre 2.
- Dans certains cas (identité remarquable, $b = 0$, $c = 0$, racine évidente) on peut factoriser $ax^2 + bx + c$ sans utiliser la propriété précédente (cf ex 3. 5)

Propriété 3. 5

somme et produit de racines

Dans le cas où $\Delta > 0$:

- $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $p = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple 3. 6

1. Trouver deux nombres réels de somme 25 et de produit 144.
2. Trouver une racine évidente de $2x^2 + 3x + 1$ et déterminer l'autre avec la propriété 3. 4

Conséquences

- Si on connaît une racine on peut calculer l'autre rapidement en utilisant s ou p . On a donc intérêt à repérer, lorsque c'est possible, une racine évidente comme 1, -1, 2, -2 etc. (cf ex 3. 5)
- La connaissance de s et p permet de donner des informations sur le signe des racines. Par exemple le trinôme $x^2 - 6x + 8$ admet deux racines. Leur produit vaut $\frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ donc les racines sont de même signe. Leur somme vaut $-\frac{b}{a} = 6$ donc les racines du trinôme sont toutes deux positives (si elles étaient négatives leur somme le serait aussi).
- La propriété précédente permet d'écrire $ax^2 + bx + c = a(x^2 - sx + p)$. En particulier si $a = 1$ alors $-s = b$ et $p = c$. Par exemple, avec $x^2 - 6x + 8$ on a directement $s = 6$ et $p = 8$.
- On peut facilement démontrer que deux réels ont pour somme s et pour produit p si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$. Cela permet de trouver deux réels connaissant leur somme et leur produit (ex 3. 5).

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad f(-1) = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 0$$

-1 est une $\sqrt{}$

3 n'est pas une $\sqrt{}$

Démonstration:

$$(E): ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 = -\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• Si $\Delta < 0$: aucune solution dans $\mathbb{R}$

$$(x - \alpha)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{\Delta}{4a^2} < 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 32 < 0 \end{aligned}$$

• Si $\Delta = 0$: $(E) \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

• Si $\Delta > 0$: $(E) \Leftrightarrow x - \alpha = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x - \alpha = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

$$\Delta > 0$$

$$4x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} \text{ ou } x - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \text{ ou } x - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

disjonction de cas sur le signe de a .

3 Signe d'un trinôme du second degré

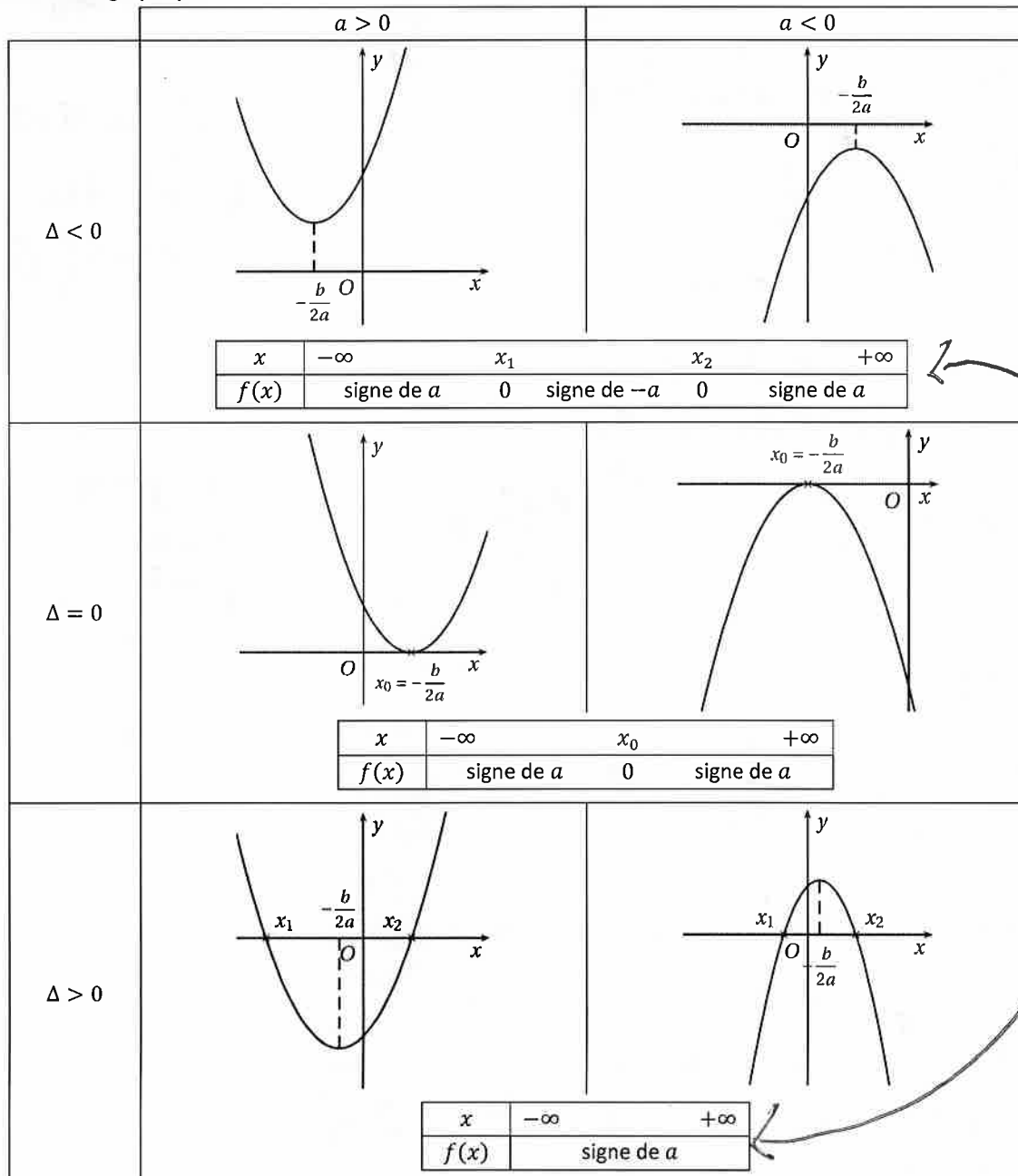
Propriété 3. 6

signe de $ax^2 + bx + c$ Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 , son unique racine.Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe de a partout sur $\mathbb{R}$ sauf entre ses deux racines x_1 et x_2 .

Remarque

On peut retenir cette propriété sous cette forme : le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre les racines quand elles existent.**Exemple 3. 7** | Résoudre les inéquations : a. $(2x + 1)(3 - x) > 0$; b. $-2x^2 + 5x \leq 4$; c. $(x - 4)^2 \leq (2 - 5x)^2$

Illustration graphique



Démon 3.4.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= ax^2 + bx + c - 0$$

$$= ax^2 + bx + c - f(x_1)$$

$$= ax^2 + bx + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)$$

$$= a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$$

$$= a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1)$$

$$= (x - x_1)(a(x + x_1) + b) = (x - x_1)(ax + ax_1 + b)$$

Un vrai pour $x \in \mathbb{R}$ donc vrai pour $x = x_2$

$$\text{Donc } (x_2 - x_1)(ax_2 + ax_1 + b) = 0 \quad f(x_2)$$

Avec $x_1 \neq x_2$ on a $ax_2 + ax_1 + b = 0$

$$\text{donc } ax_1 + b = -ax_2$$

$$\text{Alors pour } x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - x_1)(ax - ax_2)$$

Exemple 3.5

$$A(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$\Delta = 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} \quad A(x) = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

D1 – Résolution des équations du second degré

Rappels

1. Toute fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ possède une écriture (dite canonique) de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.
2. Pour tous nombres réels a et b , on a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

1. En utilisant les notations des paragraphes 1. et 3. du cours, montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

2. Raisonnement par disjonction de cas

- a. Si $\Delta < 0$, expliquer pourquoi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.
- b. Si $\Delta = 0$, montrer que α est l'unique solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- c. Si $\Delta > 0$, montrer que l'équation $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est équivalente à une équation produit nul.

En déduire les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction de a , b et Δ .

CORRIGÉ

1. D'après le Rappel 1, pour tout réel x , on a : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est donc équivalente à $a(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a}$, ou encore à $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

2. a. Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

Puisque le carré d'un nombre réel est positif, il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est une égalité vraie.

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.

b. Si $\Delta = 0$, on obtient $(x - \alpha)^2 = 0$. Cette équation est équivalente à $x - \alpha = 0$.
Finalement, α en est l'unique solution.

c. Si $\Delta > 0$, le nombre $\sqrt{\Delta}$ existe. Donc l'équation $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est équivalente à $(x - \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ (*).

D'après le Rappel 2, elle est aussi équivalente à $\left[(x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[(x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$.

C'est une équation produit nul.

Donc $(x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $(x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$. Ainsi $x = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or, $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Donc les solutions sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque : En écrivant $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ à l'étape (*), on obtient les mêmes solutions.

Démonstration 1 : Forme canonique

Rappel : Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2.$$

Soit f une fonction polynôme du second degré, c'est-à-dire une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec a réel non nul et b et c des réels.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x)$ peut s'écrire $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.

2. Vérifier alors que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

3. En déduire que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Démonstration 2 : Variations d'une fonction polynôme du second degré

Rappel : Une fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle I si pour tous x_1 et x_2 dans I avec $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Soit f une fonction polynôme du second degré.

Partie A. Cas où a est strictement positif

Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Étude sur $]-\infty; \alpha]$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $]-\infty; \alpha]$, tels que $x_1 < x_2 \leq \alpha$.

1. En utilisant les variations de la fonction carré, démontrer que $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$.

2. En déduire que $f(x_1) > f(x_2)$ et conclure.

Étude sur $[\alpha; +\infty[$

Remarque : On pourrait raisonner de même sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$. On propose ici une autre démonstration.

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $[\alpha; +\infty[$, tels que $\alpha \leq x_1 < x_2$. Posons $y_1 = 2\alpha - x_2$ et $y_2 = 2\alpha - x_1$.

1. Vérifier successivement :

$y_1 \in]-\infty; \alpha]$ et $y_2 \in]-\infty; \alpha]$, puis $y_1 < y_2$, puis $f(y_2) = f(x_1)$.

2. De même, on montre que $f(y_1) = f(x_2)$.

Déduire des questions précédentes que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

Partie B. Cas où a est strictement négatif

Démontrons que f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Étude sur $]-\infty; \alpha]$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $]-\infty; \alpha]$ tels que $x_1 < x_2 \leq \alpha$.

1. Démontrer que $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$.

2. En déduire que $f(x_1) < f(x_2)$ et conclure.

Étude sur $[\alpha; +\infty[$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $[\alpha; +\infty[$ tels que $\alpha \leq x_1 < x_2$.

En adaptant les questions 1. et 2. ci-dessus, démontrer que f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Démonstration 3 : Axe de symétrie d'une parabole

Considérons la parabole $\mathcal{P}$ représentant, dans un repère orthonormé, la fonction polynôme de degré 2 écrite sous forme canonique $f: x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$.

1. Montrer que pour tout nombre réel h , on a :

$$f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$$

2. a. Justifier que, pour tous points M et M' symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$, il existe un nombre réel h tel que $x_M = \alpha - h$ et $x_{M'} = \alpha + h$.

b. En déduire que la parabole $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

Démonstration 4 : Somme et produit des éventuelles racines

1. Dans le cas $\Delta > 0$, rappeler l'expression des deux racines de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

2. a. Vérifier alors que leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$.

b. En utilisant une identité remarquable, montrer que le produit des racines est égal à $\frac{1}{4a^2} \times (b^2 - \Delta)$ et en déduire qu'il est égal à $\frac{c}{a}$.

Démonstration 5 : Écriture factorisée

Rappel : Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Soit f une fonction polynôme de degré 2. On utilisera les notations des paragraphes 1. et 3. du cours.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x)$ peut s'écrire $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

2. Supposons que $\Delta = 0$. Déduire de la question 1. l'écriture factorisée de f .

3. Supposons que $\Delta > 0$.

a. Écrire $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ comme la différence de deux carrés.

b. En utilisant le Rappel, donner l'écriture factorisée de f .

Activité 1 : variations d'une fonction polynôme du second degré

Un constructeur d'automobile décide de commercialiser des voitures à bas coût : chaque voiture doit être vendue 6 milliers d'euros.

Sa production q peut varier entre 0 et 100 milliers de voitures. Suite à une étude réalisée, les coûts de production (en milliers d'euros) sont donnés par la formule suivante : $C(q) = 0,05q^2 + q + 80$ (q exprimé en milliers d'unités).

1. Exprimer, en fonction de q , la recette $R(q)$, en milliers d'euros.
2. On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ est unique et appelée forme développée de f .

Déduire de la question précédente la forme développée, en fonction de q , de la fonction B qui donne le bénéfice réalisé par l'entreprise.

3. Dans cette question on se propose de déterminer le nombre d'automobiles à produire et à vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

a. En développant l'expression proposée, déterminer deux réels α et β tels que $B(q) = -0,05(q - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée forme canonique de f .

b. Rappeler les variations des fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \alpha$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $h : x \in \mathbb{R} \mapsto -0,05x + \beta$.

En déduire que B est décroissante sur $[\alpha ; 100]$.

c. Quel est le nombre d'automobile à produire pour obtenir un bénéfice maximal ?

Activité 2 : déterminer les racines d'une fonction du second degré

1. On se propose de résoudre l'équation du second degré (E) : $x^2 + 10x = 39$.

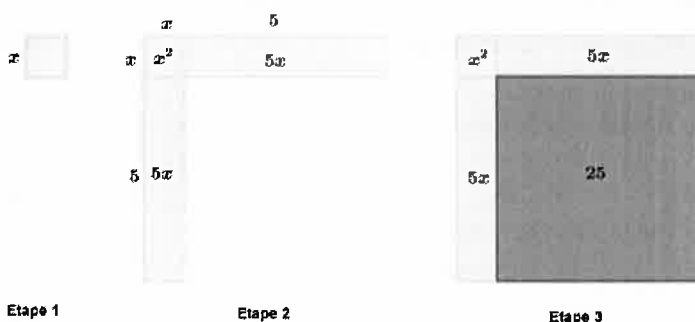
Voici la méthode proposée par Al-Khwârizmî.

Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x .

Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire respective vaut $\frac{10}{2} \times x$.

On obtient ainsi 5 comme autre dimension.

Étape 3 : on complète alors le grand carré.



- a. Exprimer l'aire de la surface colorée en jaune de deux façons différentes, en déduire que :

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25.$$

- b. En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$.

Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).

Al-Khwârizmî ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui 64 n'a qu'une racine carrée qui est 8.

- c. Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2. Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^2 + 12x = 45$

b. $x^2 + 4x - 32 = 0$

Activité 3 : étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

1. On considère les fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -4x^2 + 8x + 21$; $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$; $i(x) = 3x^2 + 12x + 20$.

- a. Factoriser $f(x)$. En déduire, à l'aide d'un tableau, le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- b. Montrer que $g(x) = (-2x + 7)(2x + 3)$. En déduire, à l'aide d'un tableau, le signe de $g(x)$.
- c. Factoriser $h(x)$. En déduire le signe de $h(x)$.
- d. Montrer que $i(x) = 3(x + 2)^2 + 8$. En déduire le signe de $i(x)$.

2. Tracer les courbes représentatives des quatre fonctions précédentes. L'allure de ces courbes confirme-t-elle les

résultats précédents sur le signe de ces fonctions ? Justifier.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

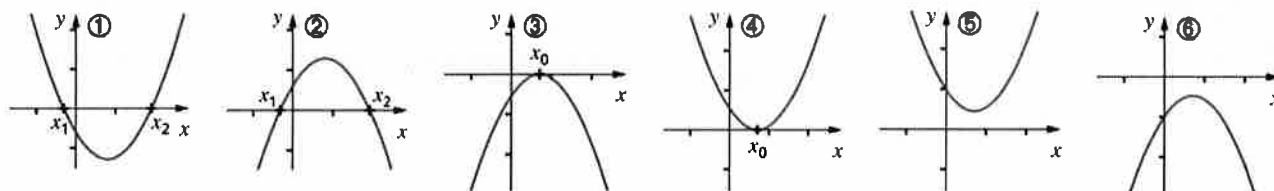
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels, } a \neq 0.$$

Suivant les valeurs de a, b et c on peut obtenir l'une des six courbes ci-dessous.

- a. Pour chacune de ces courbes :

- indiquer le signe de a
- celui du discriminant Δ de $ax^2 + bx + c$
- dresser le tableau de signes de $f(x)$.

- b. Énoncer alors une règle pour déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.



Etudier une fonction du second degré

Exercice 3. 1

Mettre sous forme canonique chacun des trinômes donnés.

- a. $x^2 + 3x - 10$ d. $3 - 2x^2$
 b. $x^2 + 7x + 11$ e. $x^2 - 2x$
 c. $-3x^2 + 10x + 8$ f. $(2x - 3)^2$

Exercice 3. 2 (29 p 51)

f est une fonction polynôme du second degré. Préciser dans chaque cas le signe du coefficient de x^2 et les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f dans un repère.

a.	x	$-\infty$	7	$+\infty$
	$f(x)$		11	
b.	x	$-\infty$	-5	$+\infty$
	$f(x)$		9	

Exercice 3. 3 (101 p 55)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Étudier les variations de f .

Exercice 3. 4

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (2x + 2)(3 - x)$ et C sa courbe représentative dans un repère.

- Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer la forme canonique de f .
- En utilisant la forme la plus adaptée déterminer :
 - l'image de 0 par f ;
 - les antécédents de 6 par f ;
 - la table de variation de f ;
 - l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$;
- Déterminer :
 - une équation de l'axe de symétrie de C ;
 - les coordonnées du sommet de la parabole C .

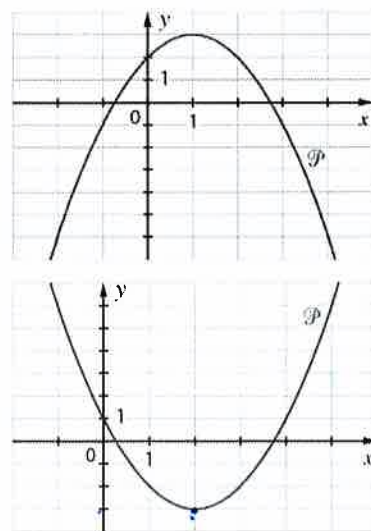
Exercice 3. 5 (98 p 54)

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 4x^2 - x + 1$.

- Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$.
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 3. 6

Les courbes représentées ci-dessous sont deux fonctions polynôme du second degré. Déterminer une expression de chacune d'elles.



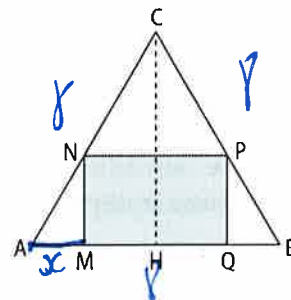
Exercice 3. 7 (111 p 55)

Pour tout nombre réel m , on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = 2x^2 + mx + 1$. Conjecturer avec une calculatrice ou un logiciel la nature de l'ensemble des points formés par les sommets des paraboles représentant les fonctions f_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$ puis vérifier ou infirmer cette conjecture par une démonstration.

Exercice 3. 8 (122 p 56)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$. On pose $AM = x$.

- Quelles sont les valeurs de x possibles ?
- Calculer CH , où H est le pied de la hauteur issue de C .
- En déduire que $MN = x\sqrt{3}$.
- Déterminer en justifiant, la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.



Exercice 3. 9 (120 p 56)

On considère un rectangle $ABCD$ dont les côtés mesurent 4 cm et 8 cm. Les points M et N sont respectivement sur les côtés $[AD]$ et $[DC]$ tels que $DN = 2AM$. On note x la longueur en centimètres du segment $[AM]$.

- Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre x ?
- Déterminer en justifiant, la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle MNB est maximale.

Exercice 3. 10

Un berger veut disposer ses 200 mètres de grillage en forme de rectangle. Déterminer les dimensions du rectangle ayant la plus grande aire.

Déterminer les racines d'une fonction du second degré

Exercice 3. 11

Résoudre les équations du second degré données

1. $x^2 - 2x - 4 = 0$
2. $x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $2x^2 + 2x + 5 = 0$
4. $25x^2 - 80x + 64 = 0$

Exercice 3. 12

Résoudre les équations du second degré données

1. $49x^2 - 25 = 0$
2. $2x^2 + 3 = 0$
3. $2x^2 - 3x = 0$
4. $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Exercice 3. 13

Résoudre les équations du second degré données

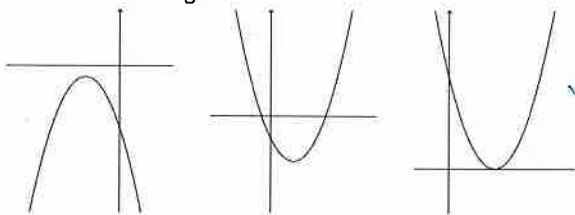
- a. $(2x + 1)^2 = -2x + 5$;
- b. $(2x + 3)(x - 1) = (3x - 2)(2x - 6)$
- c. $(x + 2)(x^2 - 3) = (2x + 3)(x^2 + x - 2)$
- d. $x^3 + x = x^2$
- e. $x^4 = x^2$

Exercice 3. 14 (54 p 52)

Sophie affirme, sans calculer la valeur exacte du discriminant, que l'équation $7x^2 + 19x - 2019$ possède deux racines distinctes. A-t-elle raison ? Pourquoi ?

Exercice 3. 15

1. Déterminer le signe du discriminant des trinômes suivants le plus simplement possible.
 - a. $3 - 4x^2$;
 - b. $2x(x - 4)$;
 - c. $x^2 + 1$.
2. Chacune des représentations graphiques suivantes est celle d'une fonction trinôme. Préciser pour chacune d'elles le signe de son discriminant et celui du coefficient du monôme de degré 2.



Exercice 3. 16

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{8-5x-3x^2}{4x^2+2x-2}.$$

- a. Déterminer le domaine de définition de f .
- b. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Résoudre les équations suivantes :
 - a. $\frac{1}{x-3} = 4x - 1$
 - b. $\frac{x^2+2x+3}{x-1} = -2$
 - c. $\frac{x}{x+1} = x - 1$

Exercice 3. 17 (32, 33 p 51)

Factoriser les polynômes suivants

- a. $x^2 + 6x + 9$
- b. $x^2 + 18x + 77$
- c. $x^2 - x - 6$
- d. $-x^2 + 2x + 15$
- e. $2x^2 - 7x + 8$
- f. $3x^2 + 7x + 2$

Exercice 3. 18

Résoudre les équations suivantes.

- a. $\frac{2x+2}{x-1} = \frac{x}{2x+1} + \frac{x+2}{2x^2-x-1}$
- b. $\frac{2x}{3(x-2)} - \frac{x+5}{2(x+1)} = \frac{4}{x^2-x-2}$
- c. $\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{2x}{-3x^2-5x+2}$
- d. $\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{x}{2x^2+3x-2} = 0$

Exercice 3. 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

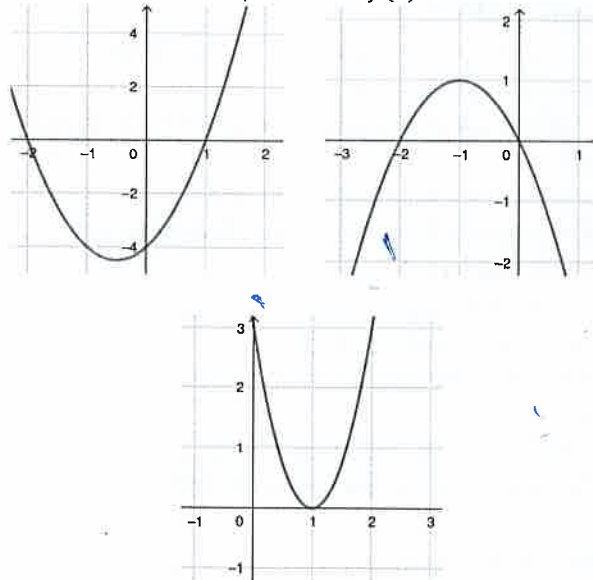
1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de f . Que peut-on en déduire ?
2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$ et en déduire une forme simplifiée de $f(x)$.

Exercice 3. 20

Les graphiques ci-dessous représentent des fonctions du second degré $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$.

Dans chaque cas :

- a. Que peut-on dire de a et b ?
- b. Que peut-on dire de Δ ?
- c. Déterminer une expression de $f(x)$.



Exercice 3. 21 (46 p 52)

1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 1 et en -12.
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en -4 et 3 et telle que $f(4) = 4$.
3. Déterminer la fonction polynôme du second degré g de racines -1 et 1 et telle que $g(0) = 1$.

Exercice 3. 22 (16 p 50)

Les équations suivantes ont deux racines distinctes. Donner leur somme et leur produit.

- a. $x^2 + 5x - 11 = 0$
- b. $2x^2 - x - 89 = 0$
- c. $-3x^2 + 7x + 20 = 0$
- d. $-x^2 - 9x + 17 = 0$

Exercice 3. 23 (44 p 52)

- Déterminer le réel c de telle sorte que le réel -3 soit solution de l'équation $2x^2 - 5x + c = 0$.
- Sachant que l'équation précédente admet une autre solution distincte de -3 , déterminer cette deuxième solution.

Exercice 3. 24 (82 p 53)

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 15 et le produit est -54 .

Exercice 3. 25 (83 p 53)

Existe-t-il un rectangle d'aire 5 et de périmètre 8 ?

Exercice 3. 26 (55-57 p 52)

Déterminer les solutions de l'équation donnée sachant que l'une d'elles est évidente.

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a. $x^2 - 8x + 7 = 0$ | b. $2x^2 + x - 3 = 0$ |
| a. $-4x^2 + 7x + 11 = 0$ | b. $x^2 + 10x + 9 = 0$ |
| a. $37x^2 - 3x - 40 = 0$ | b. $x^2 - x - 2 = 0$ |

Exercice 3. 27 (53 p 52)

Résoudre les équations sans utiliser le discriminant.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a. $x^2 + x - 12 = 0$ | b. $5x^2 - 3x + 1 = 0$ |
| c. $2x^2 + x - 3 = 0$ | d. $9x^2 - 30x + 25 = 0$ |

Exercice 3. 28

- On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 + x^2 - 2 = 0$.
 - Cette équation est-elle une équation du second degré ?
 - Si l'on remplace x^2 par X , par quoi doit-on remplacer x^4 ?
 - En déduire que l'équation (E) est équivalente à une équation du second degré (E') dont l'inconnue est X .
 - Résoudre (E') .
 - Pour chaque solution X trouvée, déterminer les valeurs de x correspondantes. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- En utilisant la même méthode, résoudre les équations proposées :
 - $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;
 - $x^4 - 3x^2 + 5 = 0$.
- En effectuant un changement d'inconnue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 + 2)^2 - 8(x^2 + 2) + 15 = 0$.

Exercice 3. 29 (Hatier 137 p 98)

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 13x - 21.$$

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer une solution entière de l'équation $g(x) = 0$ et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- Déterminer les valeurs des nombres réels a , b et c tels que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c).$$
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis valider ou infirmer la conjecture concernant le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 3. 30 (Déclic 178 p 31)

- Montrer que pour tout nombre réel x et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

- En déduire que pour tout entier naturel n , $2020^n - 1$ est divisible par 2019.

Exercice 3. 31 (Déclic 179 p 31)

- Soient a et x deux nombres réels et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer, en développant, que l'expression suivante donne une factorisation de $x^n - a^n$.

$$(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$
- Retrouver cette formule en utilisant le résultat de la question 1 de l'exercice précédent en remplaçant x par $\frac{x}{a}$ dans le cas où $a \neq 0$.
- Ecrire une formule de factorisation de $x^3 - a^3$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $13^n - 2^n$ est divisible par 11.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 3^{2n} - 2^n$. Trouver un entier qui divise a_n pour tout entier naturel n .

Exercice 3. 32 (68 p 52)

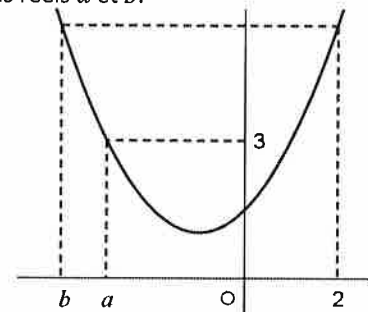
Déterminer le réel a tel que l'équation $x^2 + 2x - 7a = 0$ n'admette qu'une seule solution. Quelle est cette solution ?

Exercice 3. 33 (69 p 52)

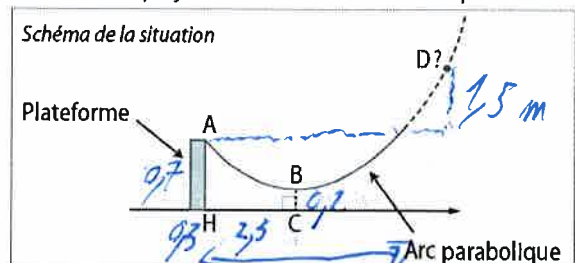
Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ admette deux solutions distinctes.

Exercice 3. 34

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b .

**Exercice 3. 35** (CQFD 79 p 105)

Quentin doit présenter au conseil municipal des jeunes de sa ville un projet de construction d'une rampe de skate.



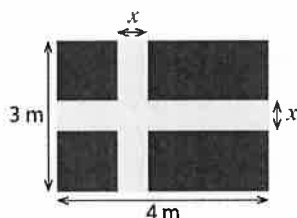
Après discussion avec les jeunes skateurs de la ville, il propose les conditions suivantes :

- la plateforme a une hauteur de 70 cm et une largeur de 30 cm ;
- la rampe est modélisée par un arc de parabole ;
- le point B le plus bas de la rampe est situé à 20 cm du sol et son projeté orthogonal C sur le sol est situé à 230 cm du pied H de la plateforme ;
- la différence entre les hauteurs des points de départ D et d'arrivée A doit être égale à 1,50 m.

À quelle distance du point H doit-on placer le pied de la deuxième plateforme afin que la rampe vérifie la totalité des conditions ? On travaillera avec des valeurs exactes.

Exercice 3. 36 (86 p 53)

Quelle valeur x doit prendre la largeur de la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Exercice 3. 37 (Hatier 153 p 100)

Pendant la période des soldes, un site de ventes privées affiche une remise de t % sur les prix des chaussures. Pour les clients titulaires de la carte de fidélité, une remise supplémentaire de $0,5t$ % sur le prix soldé est accordée.

Noémie bénéficie de ces deux remises et paie 18 € un article dont le prix initial était de 25 €.

Quelle est la valeur de t ?

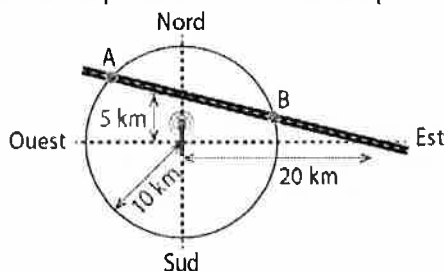
Exercice 3. 38 (89 p 54)

Des participants à une conférence ont échangé des poignées de mains et l'un d'eux a compté qu'il y avait eu en tout 325 poignées de mains.

Combien de personnes ont assisté à la conférence ?

Exercice 3. 39 (171 p 66)

Un émetteur de radio a une portée de dix kilomètres. Une route parfaitement rectiligne passe à 5 km au nord et à 20 km à l'est de l'émetteur. On veut déterminer les points A et B délimitant la portion de route couverte par l'émetteur.



On choisit un repère orthonormé formé par les droites (NS) et (WE), dont l'origine O est l'émetteur et d'unité un kilomètre.

1. Montrer que les coordonnées $(x ; y)$ des points A et B vérifient $x^2 + y^2 = 100$.

2. Déterminer une équation de la droite (AB).

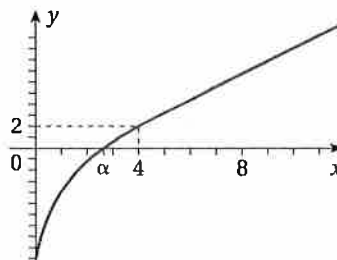
3. En déduire que les ordonnées des points A et B sont

solutions de l'équation $17y^2 - 160y + 300 = 0$.

4. En déduire les coordonnées des points A et B à un mètre près.

Exercice 3. 40

La fonction f donnée par $f(x) = x - \frac{10}{x+1}$ est croissante sur l'intervalle $[0 ; 8]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comme l'illustre sa représentation graphique ci-dessous.



On souhaite encadrer la valeur α avec la précision p choisie. Le principe est le suivant :

- on commence par calculer l'image du centre de l'intervalle $[0 ; 8]$;
- 4 est le centre de l'intervalle $[0 ; 8]$ et $f(4) = 2$ est positif, donc $\alpha < 4$ car la fonction f est croissante ;
- on peut en conclure que $\alpha \in [0 ; 4]$;
- on réitère le processus sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

a. Par quelle formule calcule-t-on le centre c d'un intervalle $[a ; b]$ à partir des bornes a et b ?

b. Compléter le tableau suivant pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,5. On utilisera une calculatrice pour obtenir les valeurs des images $f(x)$.

a	b	$b - a$	c	$f(c)$	signe de $f(c)$
0	8	8	4	2	
0	4	4	2	$\approx -1,3$	
		2	3		

c. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il donne l'encadrement souhaité.

```

Entrer un nombre positif p
a prend la valeur 0
b prend la valeur 8
Tant que b - a > p
    Si f((b-a)/2) ..... alors
        b prend la valeur .....
    Sinon
        a prend la valeur .....
    Fin si
Fin tant que
Afficher a, b
  
```

d. Exécuter l'algorithme précédent pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-5} .

Etudier le signe d'une fonction du second degré

Exercice 3. 41 (36 p 51)

Résoudre les inéquations suivantes

- $x^2 + 2x \leq 24$
- $x^2 + x + 6 \geq 0$
- $-2x^2 - 12x - 18 < 0$
- $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} \geq 0$
- $(2x-3)^2 - (2x-3)(x^2-x+1) < 0$
- $(-9x^2 + 12x - 4)(2x^2 + x - 6) > 0$

Exercice 3. 42

Résoudre les inéquations suivantes.

- $x^2 \geq -2x - 7$
- $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
- $(x^2 + 2x + 1)^2 \leq 16$
- $9x^2 - 6x + 1 < 0$

Exercice 3. 43

Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par :

- $f(x) = 3 - \sqrt{2x^4 + 5x^3 - 3x^2}$;
- $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$.

Exercice 3. 44

1. Résoudre les inéquations suivantes. On pourra vérifier les résultats graphiquement.

- a. $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$; b. $7x^2 + 11 > 6x(x+1)$.

2. a. Etudier le signe des trinômes :

$$x^2 - 5x + 6 \text{ et } -x^2 + 3x + 4.$$

b. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation :

$$\frac{12}{5(x+1)} + \frac{2}{5(4-x)} \leq 1.$$

Exercice 3. 45

Résoudre les inéquations suivantes :

- $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$
- $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6} \geq -1$
- $\frac{x+3}{2(x-1)} \leq \frac{3(x-8)}{x-5}$
- $\frac{x^2-x+1}{x+2} \leq 2x+3$;
- $\frac{x}{x-1} \geq \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$;
- $\frac{(6x+8-2x^2)(3-x)}{4x^2-12x+9} \geq 0$.

Exercice 3. 46 (144 p 57)Soit f une fonction polynôme du second degré d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant strictement positif. Soit α un nombre réel.

- Montrer que, si α est compris entre les racines de f , alors $a \times f(\alpha) < 0$.
- La condition $a \times f(\alpha) < 0$ est-elle une condition nécessaire et suffisante pour que α soit compris entre les racines de f ?
- Proposer une inéquation du second degré ayant pour ensemble solution l'intervalle $] -7 ; 2]$.
- Proposer une inéquation du second degré ayant pour ensemble solution la réunion des intervalles $] -\infty ; 2]$ et $[9 ; +\infty [$.

Exercice 3. 47 (70 p 53)Déterminer tous les réels b tels que l'équation $x^2 + bx + 5 = 0$ n'ait aucune solution.**Exercice 3. 48**Soit m un réel. Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$$

admet-elle deux solutions distinctes ?

Exercice 3. 49 (Hatier 118 p 94)1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.b. Dresser par le calcul le tableau de signes de la fonction f , puis valider ou corriger la conjecture émise au a.2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .b. Que peut-on en déduire pour les représentations graphiques de f et de g ?

c. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3. 50Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8.$$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.2. Dresser le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$ et interpréter graphiquement le résultat.3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 3$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.**Exercice 3. 51****Partie A**On désigne par $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x(4-x) \text{ et par } \mathcal{H} \text{ celle de la fonction } g :$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mapsto \frac{x-4}{x-3}.$$

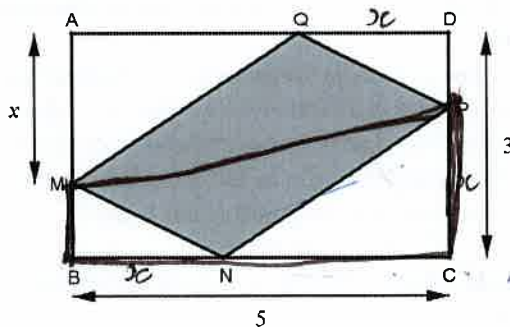
1. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.2. Étudier algébriquement les positions relatives des courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.**Partie B** m désigne un nombre réel non nul.On désigne par un repère $\mathcal{P}_m$ la parabole représentant la fonction $f_m : x \in \mathbb{R} \mapsto mx^2 - 4mx + 4m + 2$.1. Montrer qu'un point $M(x; y)$, avec $x \neq 3$, appartient à la fois à l'hyperbole $\mathcal{H}$ et à la parabole $\mathcal{P}_m$ si et seulement

si son abscisse x est solution de l'équation $(x-2)(mx^2 - 5mx + 6m + 1) = 0$.

2. Dédire de cette factorisation l'ensemble des réels m pour lesquels $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{H}$ ont :
- un seul point commun ;
 - deux points communs ;
 - trois points communs.

Exercice 3. 52

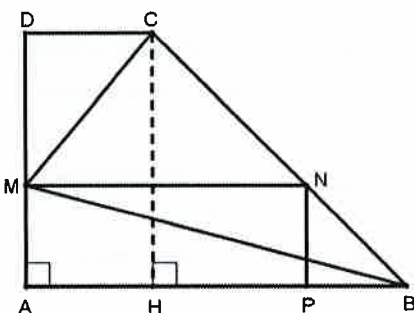
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$. On place sur les côtés les points M, N, P et Q comme sur la figure, avec $AM = BN = CP = DQ$. On note x la distance AM en cm et $S(x)$ l'aire de $MNPQ$ en cm^2 .



1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction S ?
2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}, S(x) = 2x^2 - 8x + 15$.
3. Peut-on placer M de telle sorte que $MNPQ$ ait une aire de 9 cm^2 ?
4. a. Dresser le tableau de variation de S .
b. Quelle est l'aire maximale de $MNPQ$? Quelle est l'aire minimale de $MNPQ$?
5. a. Montrer que l'aire T du trapèze $MBCP$ est constante.
b. Pour quelles valeurs de x l'aire $MNPQ$ est-elle strictement inférieure à celle du trapèze ?

Exercice 3. 53

$ABCD$ est un trapèze tel que $AB = 6$, $CD = 2$ et $AD = 4$. Un point M décrit le segment $[AD]$. On construit le rectangle $AMNP$ avec $N \in [BC]$ et $P \in [AB]$. On pose $x = AM$.

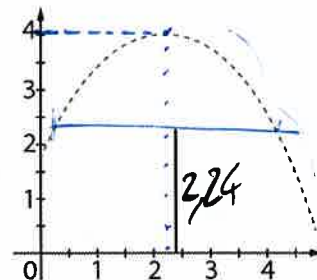


1. Quel intervalle décrit x ?
2. a. Quelle est la nature du triangle BPN ?
b. En déduire BP en fonction de x .
c. Montrer que l'aire du rectangle $AMNP$ est $f(x) = -x^2 + 6x$.

- d. Dresser le tableau de variations de f ainsi définie sur $[0; 4]$.
3. a. Calculer l'aire de $ABCD$.
b. En déduire que l'aire $g(x)$ du triangle BMC est $g(x) = 12 - 2x$.
4. Tracer les courbes représentant les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle BMC .
5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles :
a. l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale ;
b. $AMNP$ et BMC ont la même aire ;
c. l'aire de $AMNP$ est supérieure à celle de BMC .
6. Expliquer comment vérifier graphiquement les résultats de la question 5.

Exercice 3. 54 (CQFD 56 p 100)

Lors d'un entraînement de volley-ball, Thibault prend des photos en rafales pour analyser la passe de Sophia au-dessus du filet. Il modélise la hauteur (en mètre) du ballon par la fonction $h: t \mapsto -0,49t^2 + 2,1t + 1,75$, où t est le temps (en seconde).



1. Déterminer l'écriture canonique de la fonction h .
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de la passe représentée ?
3. Au bout de combien de temps le ballon touche-t-il le sol ?
4. La hauteur du filet est 2,24 m. Pendant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ? On arrondira au dixième de seconde.

Exercice 3. 55 (CQFD 63 p 101)

Un artisan fabrique des tables. Il en produit au maximum 100 par mois. On suppose que toute table fabriquée est vendue. La fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $C(x) = 0,2x^2 + 4x + 1,2$ modélise le coût de production de x dizaines de tables, en milliers d'euros.

1. Quel est le coût de production de 70 tables ?
2. Donner le nombre de tables produites pour un coût de production de 2 418 €.
3. L'artisan décide de vendre les tables 540 euros l'unité.
a. Vérifier que le bénéfice de l'artisan réalisé par la vente de x dizaines de tables en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur $[0; 10]$ par $B(x) = -0,2x^2 + 1,4x - 1,2$.
b. Pour quels nombres de tables vendues l'artisan perd-il de l'argent ?
c. Pour quel nombre de tables fabriquées et vendues le bénéfice de l'artisan sera-t-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

4 Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

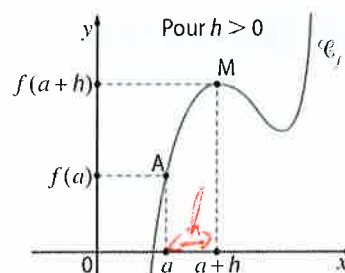
f désigne une fonction définie sur un intervalle I , a un élément de I et h un nombre réel non nul tels que $(a + h) \in I$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

Définition 4.1

taux d'accroissement entre a et $a + h$

On appelle taux de variation (ou d'accroissement) de f entre a et $a + h$ le nombre $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation géométrique : Si A et M sont les points de C_f d'abscisses respectives a et $a + h$ alors la droite (AM) , sécante à la courbe représentative de f , a pour pente (ou coefficient directeur) le taux de variation $\tau_a(h)$.



Exemple 4.1 | Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le taux d'accroissement de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, entre 1 et $1 + h$.

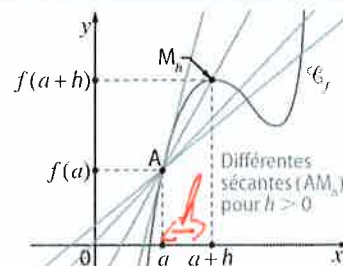
Définition 4.2

nombre dérivé de f en a

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de 0 les nombres $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ sont de plus en plus proches d'un nombre réel l . On dit alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a . Ce nombre l est noté $f'(a)$ et on écrit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation géométrique : Lorsque h tend vers 0 le point M de C_f se rapproche du point A . Dans ce cas la droite (AM) , de coefficient directeur $\tau_a(h)$, se rapproche d'une position limite : la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : - Avec $x = a + h$ cette limite peut aussi s'écrire $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- En physique, lorsque $y = f(x)$, les taux d'accroissements sont souvent notés $\frac{dy}{dx}$ et le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\frac{dy}{dx}$.



Exemple 4.2

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, $f_2 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $f_3 : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.

1. A l'aide du résultat du dernier exemple montrer f_1 est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé de f_1 en 1. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.
2. Démontrer que f_2 est dérivable en 2 et déterminer $f_2'(2)$. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.
3. Démontrer que $\forall h > 0, \frac{f_3(h)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. En déduire que f_3 n'est pas dérivable en 0.

Définition 4.3

tangente à la courbe en a

Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe C_f en $A(a; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 4.1

équation de la tangente à C_f en a

Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe C_f en $A(a; f(a))$ a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

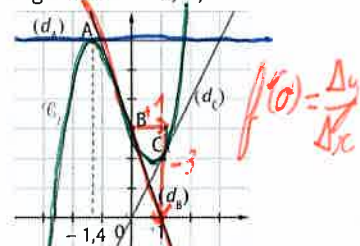
Remarque : - Localement, au point A , C_f est presque confondue avec sa tangente.

Autrement dit, pour $x \approx a$ on a $f(x) \approx f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

- $f'(a) = 0$ si et seulement si la tangente en A est horizontale.

Exemple 4.3

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que ses tangentes en $-1,4$; 0 et 1 .



1. Déterminer $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(-1,4)$.
2. Déterminer une équation des tangentes en 0 , 1 et $-1,4$.

Exemple 4.1:

$$\tau_a(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

avec $h \neq 0$

(a+b)² = a² + 2ab + b²

La mon

Exemple 4.2:

1) f_1 est dérivable en 1 si la $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} \in \mathbb{R}$

Alors $f'_1(1) = \text{résultat}$

① Taux d'accroissement (entre 1 et 1+h)

$$\text{Soit } h \in \mathbb{R}^*, \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h$$

② $\lim_{h \rightarrow 0}$ du taux en 0 $\lim_{h \rightarrow 0}$ du résultat

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2$$

③ Conclusion

$2 \in \mathbb{R}$ donc f_1 est dérivable en 1, avec $f'_1(1) = 2$

$$2) \tau_2(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2h(2+h)} = -\frac{1}{2(2+h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Donc f est dérivable en 2 car $-\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$

$$\text{avec } f'(2) = -\frac{1}{4}$$

À connaître la technique sur la calculatrice pour vérifier.

2 Fonction dérivée

Définition 4. 4

fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout nombre appartenant à I .

Si f est dérivable sur I on appelle la fonction dérivée de f sur I , ou simplement dérivée de f sur I , la fonction f' qui, à tout $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$

Exemple 4. 4

Démontrer que les fonctions carré, inverse et racine carrée sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de leur dérivée.

Remarque : - L'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable est appelé l'ensemble de dérivabilité de f .

- Le nombre dérivé de f en x , $f'(x)$ est donc désormais aussi, par définition, l'image de x par la fonction f' .

3 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 4. 2

dérivées des fonctions usuelles

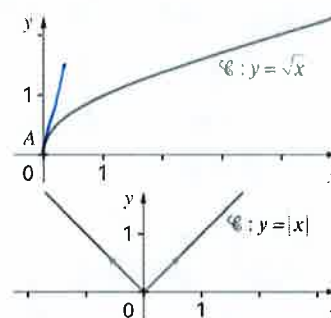
Fonction	Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée
Constante	$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
Affine	$x \mapsto ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$
Carré	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
Puissance	$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$x \mapsto nx^{n-1}$
Inverse	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple 4. 5

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^6$ en 2. Même question pour les fonctions racine carrée et inverse.

Remarque :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable en 0 : on a vu dans l'exemple 2 que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_0(h) = +\infty$. Ce résultat peut s'interpréter par l'existence d'une demi tangente verticale à la courbe en 0.
- La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 : les limites à gauche et à droite en 0 de $\tau_0(h)$ valent respectivement -1 et 1 . Cela se traduit par l'existence de deux demi tangentes à gauche et à droite de 0. On a ici un point anguleux en 0.



4 Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante

Propriété 4. 3

dérivée d'une somme, d'un produit par une constante

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit $k \in \mathbb{R}$.

La fonction $u + v$ définie sur I par $x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

La fonction ku définie sur I par $x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et, $\forall x \in I$:

$$(ku)'(x) = k \times u'(x).$$

Exemple 4. 6

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

$$- f(x) = x^4 + 3x^3 - \frac{x^2}{4} + 2x + 1$$

$$- f(x) = 2x^3 - \frac{3}{4x} + 5\sqrt{x}$$

Remarque : - On peut retenir : $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.

- En conséquence les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$

3) Soit $h > 0$

$$\frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\frac{f_3(0+h) - f_3(0)}{h} = \frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

f_3 n'est pas dérivable en 0

Exemple 4.3 :

1) $f'(0)$ est le coef directeur de la tangente à f en 0

$$f'(0) = \frac{-3 \cdot \Delta x}{1 \cdot \Delta x} = -3$$

$$f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(1/4) = 0 \text{ (tangente horizontale)}$$

2) $y = f'(a)(x-a) + f(a) \leftarrow \text{tang en } a$

Tang en 0: $y = f'(0) \cdot (x-0) + f(0)$
 $= -3 \cdot x + 3$
 $= -3x + 3$

Tang en 1: $y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$
 $= 2 \cdot (x-1) + 2$
 $= 2x - 2 + 2$
 $= 2x$

Tang en $1/4$: $y = f'(1/4) \cdot (x - 1/4) + f(1/4)$
 $= 0 \cdot (x - 1/4) + 0$
 $= 0$

5 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 4. 4

opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
- si v ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- si v ne s'annule pas sur I , $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 4. 7

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- $f(x) = x\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{3}{x-1}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$

Remarque

La dérivée d'un produit (resp quotient) n'est pas égale au produit (resp quotient) des dérivées : $(uv)' \neq u'v'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$.

Propriété 4. 5

dérivée d'une composée

Soit g une fonction dérivable sur I .Pour tout réel x tel que $ax + b$ appartient à I , la fonction f définie par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exemple 4. 8

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- $f(x) = \sqrt{2-x}$
- $f(x) = (4x-1)^3$

Conséquence

- La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (ax + b)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n \times a \times (ax + b)^{n-1}$.
- La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{ax + b}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / ax + b \leq 0\}$ et $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

D1 – Équation réduite de la tangente en un point

Rappel : Dans un repère, $M(x_M ; y_M)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ si et seulement si $y_M = m \times x_M + p$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en a , où a appartient à I et (T_a) la tangente en $A(a ; f(a))$ à la courbe de f .

1. D'après le cours, à quoi est égal le coefficient directeur de (T_a) ?
2. En utilisant le fait que $A(a ; f(a))$ appartient à (T_a) , calculer l'ordonnée à l'origine de (T_a) .
3. En déduire l'équation réduite de (T_a) .

CORRIGÉ

1. D'après le cours, par définition, le coefficient directeur de la tangente (T_a) à la courbe de f en A est $f'(a)$. Donc l'équation de (T_a) est de la forme $y = f'(a)x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine de (T_a) .
2. $A(a ; f(a))$ appartient à la tangente (T_a) . Donc, d'après le rappel, $f(a) = f'(a) \times a + p$.
On peut en déduire l'ordonnée à l'origine de la tangente : $p = f(a) - f'(a) \times a$.
3. La tangente (T_a) a donc pour équation $y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$, ce qui est équivalent à :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

D2 – Expression du nombre dérivé de la fonction carré

Rappels

1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a + h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

1. a. Sur quel ensemble la fonction carré, notée f , est-elle définie ?
- b. Soit a et h deux réels, avec h non nul. Calculer le taux de variation $\tau_a(h)$ de f entre a et $a + h$ et montrer que $\tau_a(h) = 2a + h$.
2. En déduire que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

CORRIGÉ

1. a. D'après le cours, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. D'après le cours, par définition, pour h non nul, le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a + h$ est égal à $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$\text{Donc } \tau_a(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a + h)}{h} = 2a + h.$$

2. On a $2a + h$ qui tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0.

D'après le cours, f est donc dérivable en a et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$.

Le raisonnement précédent étant valable pour tout réel a , on peut dire aussi que la fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

D3 – Expression du nombre dérivé de la fonction inverse

Rappels

1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un nombre ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

Résultat admis

Si une fonction qui ne s'annule pas tend vers un réel ℓ non nul, alors l'inverse de cette fonction tend vers $\frac{1}{\ell}$.

1. a. Sur quel ensemble la fonction inverse, notée f , est-elle définie ?

b. Soit a et h deux réels non nuls. Calculer le taux de variation $\tau_a(h)$ de f entre a et $a+h$ et montrer que :

$$\tau_a(h) = \frac{1}{-(a^2 + ah)}.$$

2. En déduire que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

CORRIGÉ

1. a. D'après le cours, la fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b. D'après le cours, par définition, pour h non nul, le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a^2 + ah} = \frac{1}{-(a^2 + ah)}. \end{aligned}$$

2. On a $-(a^2 + ah) = -a^2 - ah$ qui tend vers $-a^2$ lorsque h tend vers 0.

De plus, $-a^2 - ah$ étant strictement négatif pour tout h non nul, il ne s'annule pas et il tend vers $-a^2$, qui est non nul.

D'après le résultat admis : $\frac{1}{-(a^2 + ah)}$ tend vers $\frac{1}{-a^2}$, soit vers $-\frac{1}{a^2}$.

D'après le cours, f est donc dérivable en a et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-(a^2 + ah)} = -\frac{1}{a^2}$.

Le raisonnement précédent étant valable pour tout réel a non nul, on peut dire aussi que la fonction inverse est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

D4 – Non-dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Soit h un nombre strictement positif. Montrer que le taux de variation de f entre 0 et h est égal à $\frac{1}{\sqrt{h}}$.

2. On suppose que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend 0. On admet qu'un tel réel ℓ est positif.

Vérifier l'implication suivante : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$.

3. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

CORRIGÉ

$$1. \text{ On a : } \tau_0(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

2. On a : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \sqrt{h} < \sqrt{\frac{1}{(1+\ell)^2}}$, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus $\sqrt{\frac{1}{(1+\ell)^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{(1+\ell)^2}} = \frac{1}{1+\ell}$, car $1+\ell$ est positif.

On a : $0 < \sqrt{h} < \frac{1}{1+\ell} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Donc : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$.

3. L'implication précédente contredit le fait que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tende vers ℓ lorsque h tend vers 0.

En effet, on a supposé dans la question 2. que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers ℓ .

Alors, par définition, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que h soit suffisamment proche de 0.

Alors $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est inférieur à $\frac{1}{2} + \ell$ (ou toute autre valeur $\varepsilon + \ell$ fixée à l'avance, avec $\varepsilon > 0$) pourvu que h soit suffisamment proche de 0.

Mais, d'après l'implication précédente, pour tout h strictement inférieur à $\frac{1}{(1+\ell)^2}$, le nombre $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est

strictement plus grand que $1 + \ell$, ce qui est contradictoire avec l'inégalité $\frac{1}{\sqrt{h}} \leq \frac{1}{2} + \ell$.

Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 1 : Expression du nombre dérivé des fonctions de référence

Rappels : 1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

Pour chaque fonction de référence f suivante : *constante*, *affine* et *cube*, et pour tout réel a :

a. calculer et simplifier le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ pour tout h non nul ;

b. montrer que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

Démonstration 2 : Dérivée du produit d'une fonction dérivable par une constante

Rappel : Si f est une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel, alors la fonction kf est définie sur I par $(kf)(x) = k \times f(x)$.

Résultats admis : Si g est une fonction telle que $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors on a $k \times g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} k \times \ell$.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , k un réel et a dans I .

1. Pour tout h non nul tel que $a+h$ est dans I , écrire le taux de variation de la fonction kf entre a et $a+h$.

2. En déduire que kf est dérivable sur I et que $(kf)' = kf'$.

Démonstration 3 : Expression du nombre dérivé de la fonction racine carrée

Rappel : Soit a, b et c des nombres réels, avec c positif. L'expression conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$.

On a en particulier : $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$.

Résultats admis

1. Si une fonction positive tend vers un réel ℓ , alors ℓ est positif et la racine carrée de cette fonction tend vers $\sqrt{\ell}$.

2. Si une fonction qui ne s'annule pas tend vers un réel ℓ non nul, alors l'inverse de cette fonction tend vers $\frac{1}{\ell}$.

On note f la fonction racine carrée et a un réel strictement positif.

1. Pour tout $h > 0$, montrer que le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

2. En déduire que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

Démonstration 4 : Dérivée de la somme de deux fonctions

Rappel : Si u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I , alors leur somme est la fonction définie sur I par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$.

Résultat admis : Si f et g sont deux fonctions telles que $f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$ et $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell'$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $(f+g)(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell + \ell'$.

Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I et a dans I .

1. Pour tout h non nul tel que $a+h$ est dans I , écrire le taux de variation de la fonction $u+v$ entre a et $a+h$.

2. En déduire que si u et v sont dérivables sur I , alors $u+v$ est dérivable sur I et sa dérivée est égale à $u' + v'$.