

Soient a et b deux nombres réels.

Propriété 6. 7

monotonie de la suite (e^{nb})

La suite (e^{nb}) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^b .

$b > 0 \Rightarrow (e^{nb})$ croissante

$b = 0 \Rightarrow (e^{nb})$ constante

$b < 0 \Rightarrow (e^{nb})$ décroissante

Exemple 6. 5

Déterminer la raison, le premier terme et la monotonie des suites géométriques suivantes.

a. $u_n = e^{-3n}$;

b. $u_n = e^{3n+4}$;

c. $u_n = 10e^{10n-1}$;

d. $u_n = 2e^{\frac{n}{e}}$.

Définition 6. 2

Un phénomène (physique, économique, etc) se modélise de façon discrète par une croissance (resp décroissance) exponentielle s'il peut être modélisé par une suite dont la représentation graphique est un nuage de points appartenant à une courbe représentative d'une fonction dont l'expression est de la forme $f(t) = ae^{bt}$ avec $a > 0$ (resp $a < 0$).

Définition 6. 3

Un phénomène (physique, économique, etc) se modélise de façon continue par une croissance (resp décroissance) exponentielle s'il peut être modélisé par une fonction dont l'expression est de la forme $f(t) = ae^{bt}$ avec $a > 0$ (resp $a < 0$).

$$\begin{aligned}
 C. \quad e^{2x} - 2e^x + 1 &= 0 \quad \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

Exemple 6.4 :

① On dérive

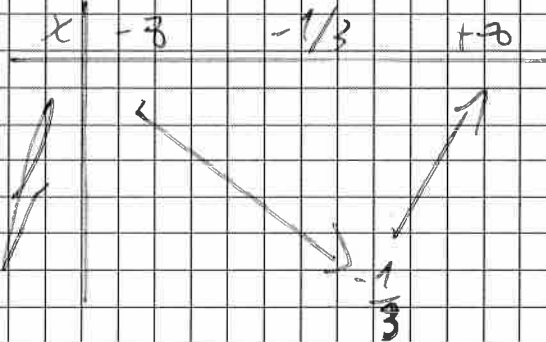
$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1xe^{3x+1} + 3xe^{3x+1} \\
 &= e^{3x+1} + 3xe^{3x+1} \\
 &= (3x+1)e^{3x+1}
 \end{aligned}$$

② signe de f'

x	$-\infty$	$-1/3$	$+\infty$	
$3x+1$	-	0	+	$3x+1 \neq 0$
e^{3x+1}	+	+	+	$e^{3x+1} > 0$
$f'(x)$	-	+	+	

③ Variations



$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3}e^{3 \times (-\frac{1}{3}) + 1} + 1 \\
 &= -\frac{1}{3}e^0 + 1 \\
 &= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

D1 – Unicité

Rappels :

1. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

• Dérivation d'un produit : uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

• Dérivation d'un quotient : si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et m et p deux réels.

Alors $x \mapsto g(mx + p)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x \mapsto m \times g'(mx + p)$.

On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Pour tout réel x , on pose $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

a. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée de h .

En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer h . En déduire que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose qu'il existe une fonction g , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Pour tout réel x , on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

a. Justifier que k est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis, pour tout réel x , calculer $k'(x)$.

En déduire que la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer k . En déduire que les fonctions f et g sont égales, puis que la fonction f est unique.

CORRIGÉ

1. a. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En appliquant la proposition de dérivée d'un produit ainsi que la proposition de dérivée de la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ (ici, $m = -1$ et $p = 0$) avec la fonction f , on obtient, pour tout réel x :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x).$$

Or, $f' = f$. Donc, pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$. Donc $h'(x) = 0$.

La dérivée de la fonction h est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

D'après la caractérisation des fonctions constantes, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b. h étant constante sur $\mathbb{R}$, pour obtenir la valeur de cette constante, il suffit de calculer, par exemple, l'image de 0 par h . On a : $h(0) = f(0) \times f(-0) = f(0)^2$.

La condition $f(0) = 1$ donne alors $h(0) = 1$. Donc, pour tout réel x , on a $h(x) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x , on a $f(x) \times f(-x) = 1$.

S'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde.

Donc, pour tout réel x , $f(x)$ est différent de 0.

Cela est équivalent à dire que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. a. Comme le dénominateur de la fonction k ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le nombre $k(x)$ est bien défini pour tout x . En appliquant la propriété de dérivée d'un quotient, on obtient, pour tout réel x :

$$k'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{[f(x)]^2} = 0. \text{ Donc } k \text{ est constante sur } \mathbb{R}.$$

b. On calcule : $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$. Donc, pour tout réel x , on a $k(x) = 1$ et par suite : $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$,

ce qui est équivalent à $g(x) = f(x)$. Donc : $f = g$.

On a montré que, s'il existe une fonction vérifiant les mêmes conditions que f , alors elle est égale à f , ce qui démontre l'unicité de f .

D2 – Relation fonctionnelle

Soit a un nombre réel quelconque et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie quel que soit le réel a et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$, puis $f(0)$. En déduire que f est la fonction exponentielle.
3. En déduire la relation fonctionnelle de l'exponentielle.

CORRIGÉ

1. Quel que soit le réel a choisi, d'après l'une des étapes de la démonstration de l'unicité, $\exp(a)$ est différent de 0. Donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times \exp(x+a)$ et $x \mapsto \exp(x+a)$ est dérivable d'après la propriété de dérivée de la composée d'une fonction affine avec la fonction $\exp$.

2. Pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times 1 \times \exp(x+a) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = f(x)$.

De plus : $f(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$.

La fonction f vérifie donc les deux conditions $f = f'$ et $f(0) = 1$.

D'après le théorème d'unicité, on en déduit que f est la fonction exponentielle.

3. Puisque le réel a est quelconque, l'égalité $\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x)$, vraie pour tout réel x , est vraie quel que soit le réel a , que l'on peut noter y .

Pour tous réels x et y , on obtient $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$, ce qui équivaut à $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

D3 – Signe et monotonie de la fonction exponentielle

1. a. Montrer que pour tout réel x , on a : $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2$.
 b. En déduire que pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 0$.
 c. Soit x un réel quelconque. Quelle est la valeur de $\exp(x) \times \exp(-x)$?
 En déduire que pour tout réel x , on a : $\exp(x) > 0$.
2. Montrer que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

1.a. Pour tout réel x , on a : $\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp(x)$.

b. Soit x un réel quelconque.

D'après la question précédente, $\exp(x)$ est le carré d'un nombre réel. D'où : $\exp(x) \geq 0$.

c. Pour tout réel x , on a : $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$.

Donc pour tout réel x , $\exp(x)$ est différent de 0. On conclut que, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

2. La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Donc la dérivée de $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des variations d'une fonction dérivable sur un intervalle, la fonction $\exp$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 1 : Propriété algébrique de la fonction exponentielle

1. Soit x un réel quelconque. La démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle a permis de démontrer que :

$$\exp(-x) \times \exp(x) = 1.$$

En déduire successivement que :

a. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;

b. pour tout réel y , on a : $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

2. Soit x un réel quelconque.

a. Vérifier l'égalité : $\exp(0 \times x) = (\exp(x))^0$.

b. Dans cette question, n désigne un entier naturel. Montrer que la suite de terme général $\exp(n \times x)$ est une suite géométrique.

En déduire que : $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

c. Dans cette question, n désigne un entier négatif.

En utilisant $\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)}$ et le fait que $-n$ est

un entier naturel, montrer que :

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

d. Conclure pour tout entier n .

Démonstration 2 : Egalités et inégalités

Soit x et y deux réels.

1. a. Justifier l'équivalence : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.

Pour l'implication $e^x = e^y \Rightarrow x = y$, on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

b. En déduire que :

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad e^x = e \Leftrightarrow x = 1.$$

2. a. Justifier l'équivalence :

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y.$$

b. En déduire que :

$$e^x < e \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{et} \quad e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Démonstration 3 : Monotonie de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle

Rappel : Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et m et p deux réels.

Alors $x \mapsto g(mx+p)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto m \times g'(mx+p)$.

Soit m et p deux réels.

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(mx+p)$.

2. Déterminer, selon le signe de m , les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. En complément, montrer que h est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si m est différent de 0.

Activité 1 : Introduire la fonction exponentielle

On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. En s'appuyant sur le fait qu'au voisinage d'un point, une courbe et sa tangente en ce point sont très proches, on va construire une « approximation » par des segments de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

1. Soit A_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 et T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point A_0 .
 - a. Donner les coordonnées de A_0 .
 - b. Justifier que le coefficient directeur de T_0 est égal à 1.
 - c. Placer A_0 dans un repère et tracer la tangente T_0 .
 - d. On nomme A_1 le point de T_0 d'abscisse 0,5. Calculer l'ordonnée de A_1 .
2. La tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 étant très proche de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$, on la remplace par le segment $[A_0A_1]$.
 - a. Justifier que si le point A_1 était sur $\mathcal{C}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A_1 serait 1,5.
 - b. Tracer la droite T_1 passant par A_1 et de coefficient directeur 1,5.
 - c. On nomme A_2 le point de T_1 d'abscisse 1. Montrer que les coordonnées de A_2 sont $(1 ; 2,25)$.
3. Sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$ on remplace $\mathcal{C}$ par le segment $[A_1A_2]$.
 - a. Si le point A_2 était sur $\mathcal{C}$ quel serait le coefficient directeur c_2 de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point ?
 - b. Tracer la droite T_2 passant par A_2 et de coefficient directeur c_2 .
 - c. On nomme A_3 le point de T_2 d'abscisse 1,5. Calculer les coordonnées de A_3 .
4. a. Soit c_3 l'ordonnée du point A_3 . Tracer la droite T_3 passant par A_3 et de coefficient directeur c_3 .
 b. On nomme A_4 le point de T_3 d'abscisse 2. Vérifier que l'ordonnée du point A_4 est égale à 5,0625.
 c. Construire le segment $[A_3A_4]$.

La ligne brisée constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$ est une approximation d'une partie de la courbe d'une nouvelle fonction qui s'appelle la fonction exponentielle.

Activité 2 : Démontrer une propriété qui sera utilisée pour définir la fonction exponentielle

On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Calculer $g(0)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 0$, pour tout réel x .
3. Que peut-on en déduire concernant la fonction g ?
4. Donner l'expression de $g(x)$ pour tout réel x en utilisant les résultats des questions précédentes.
5. En utilisant la définition de la fonction g , montrer que pour tout réel x , on a $f(x) \neq 0$.

Objectif 6. 1

Exercice 6. 1 (45 p 176) *propriétés algébriques*

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression de la variable x .

a. $e^{5x+2} \times e^{x-5}$ b. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{x+2}}$ c. $(e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3$

2. Démontrer que pour tout réel x : $\frac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$.

Exercice 6. 2 (48 – 50 p 176) *propriétés algébriques*

Écrire A , B et C sous la forme e^E où E est une expression et x un réel.

a. $A = (e^{1+x})^2 \times e^{-x}$, $B = e \times e^{5-0,1x}$ et $C = (e^{x+1})^3 \times e^{0,3x}$

b. $A = \frac{1}{e^{-7+0,2x}}$, $B = \frac{e^{2x-5}}{e^{x+5}}$ et $C = \frac{e^{-x+1}}{e^{x-3}}$

c. $A = \frac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$, $B = \frac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$ et $C = \frac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$

Exercice 6. 3 (51 – 54 p 176) *propriétés algébriques*

a. Pour tout réel x , $3e^{2x} - 8e^x - 3 = (1 + 3e^x)(e^x - 3)$.

b. Pour tout réel x , $\frac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x}$.

c. Pour tout réel x , $\frac{e^{x+1}}{e+e^{x+1}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

d. Pour tout réel x , $1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 6. 4 (57 p 176) *propriétés algébriques*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

À tout réel a non nul, on associe les points M_a et N_a de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $-a$.

Démontrer que les segments $[M_a N_a]$ ont un point commun.

Exercice 6. 5 (68 p 176) *équations*

a. $e^{x^2} = e^x$ b. $e^{-2x} - 1 = 0$

Exercice 6. 6 (69 p 176) *équations*

a. $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$ b. $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice 6. 7 (70 p 176) *équations*

a. $3e^{3x-42} + 1 = 4$ b. $e^{5x} = \frac{e^{-x}}{e}$

Exercice 6. 8 (73 p 176) *équations*

1. Démontrer que l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

Exercice 6. 9 (58 – 65 p 176)

1. $A(x) = 0,5 + e^x$, $B(x) = 1 + 0,5e^x$ et $C(x) = -10e^x$

2. $A(x) = -1 - e^x$, $B(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ et $C(x) = e^x(2 + e^x)$

3. $A(x) = -2e^{-x-1}$, $B(x) = 0,3e^{1-0,7x}$ et $C(x) = 1 + 5e^{-1,7x}$

4. $A(x) = 5e^x - xe^x$ et $B(x) = x^2e^x - xe^x$

5. $A(x) = e^x - 2xe^x$ et $B(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$

6. $A(x) = 4e^{-x} - x^2e^{-x}$ et $B(x) = xe^x - e^{x+2}$

7. $A(x) = x^2e^x - e^{x+2}$ et $B(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^x + 1}$

8. $A(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et $B(x) = xe^x - e^{x+1}$

Exercice 6. 10 (74 p 177) *inéquations*

a. $1 \leq e^{3x}$ b. $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leq 0$

Exercice 6. 11 (75 p 177) *inéquations*

a. $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ b. $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

Exercice 6. 12 (76 p 177) *inéquations*

1. Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$.

3. En déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 13 (79 p 177) *inéquations*

1. Factoriser le polynôme du second degré :

$$-5X^2 + 3X + 2.$$

2. En déduire une factorisation de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$.

3. Étudier le signe de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 14 (87 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5 - x)e^x.$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de f .

Exercice 6. 15 (89 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3).$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de f .

Exercice 6. 16 (91 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x - 1)^2$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, puis sur $[0; +\infty[$.

Exercice 6. 17 (93 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $[2; 10]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.

2. En déduire le tableau de variation de f sur $[2; 10]$.

Exercice 6. 18 (94 p 179) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$.

2. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 6. 19 (101 p 179) *étude de fonction*

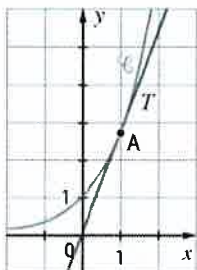
1. À l'aide d'une calculatrice, faire une conjec-

ture sur le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle et de la droite d'équation $y = x + 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
 - a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
 - b. Construire le tableau de variation de la fonction f .
 3. Démontrer la conjecture faite dans la question 1.

Exercice 6. 20 (103 p 179) étude de fonction

On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.



1. Faire une conjecture sur la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
2. Démontrer qu'une équation de T est : $y = ex$.

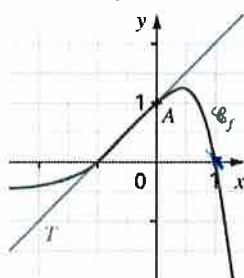
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - ex.$$

- a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c. Construire le tableau de variation de la fonction f .
4. Démontrer la conjecture faite dans la question 1.

Exercice 6. 21 (Déclic 121 p 199) étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ où a , b et c sont trois réels. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



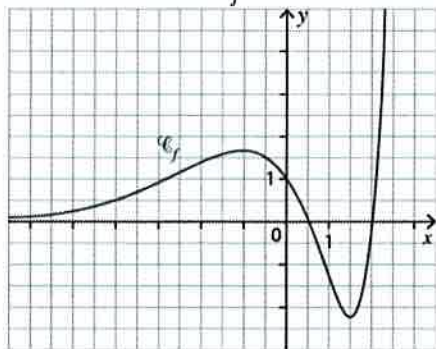
1. a. Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.
- b. En déduire la valeur de c .
2. a. Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.
- b. Calculer $f'(x)$ en fonction de a , b et c .
- c. En déduire la valeur de b .
3. Lire graphiquement $f(1)$. En déduire la valeur de a .
4. Étudier les variations de f .

Exercice 6. 22 (Barbazo 47 p 197) étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2,5x + 1)e^x.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f .

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M .

Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M (expliquer la démarche).

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0.

4. Compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près, l'abscisse du point P intersection de la tangente $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}_f$.

```
1 from math import exp
2 def intersect():
3     x=0
4     y=1
5     z=1
6     while y>=z:
7         x=...
8         y=-1.5*x+1
9         z=...
10    return ...
```

Exercice 6. 23 suite

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que, $\forall x \geq 0$, $e^x - x > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et u est la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Démontrer que f est croissante sur $[0; 1]$.
- b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
- c. A l'aide de la question précédente démontrer que $u_1 \in [0; 1]$.
- d. Démontrer de même que u_2 et u_3 appartiennent à $[0; 1]$.

Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout entier n , $u_n \in [0; 1]$.

2. a. Montrer que, $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. a. Conjecturer la limite ℓ de la suite (u_n) .

b. Proposer une fonction, écrite en Python, qui retourne l'indice du premier le premier terme de la suite (u_n) qui dépasse $\ell - 0,001$.

Objectif 6. 2

Exercice 6. 24 (95 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20xe^{-0,1x+3}$.

Exercice 6. 25 (96 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-x+1}$.

Exercice 6. 26 (97 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

Exercice 6. 27 (98 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + 2x)e^{3x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 6. 28 (99 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Justifier le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{e}{e^2 + 1}$	0,5	$\frac{e}{e^2 + 1}$

Exercice 6. 29 (102 p 178) *étude de fonction*

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 2 + e^{-2x+1}$.

Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 30 (82 p 177) *étude de fonction*

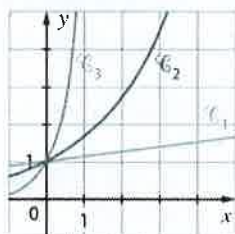
1. Soit k et m deux réels tels que $0 < k < m$. Étudier le signe de $e^{kx} - e^{mx}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{0,5x}, g(x) = e^{0,1x} \text{ et } h(x) = e^{2x}.$$

On a représenté ci-contre ces trois fonctions.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

**Exercice 6. 31** (86 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0,5e^{0,173x} \text{ et } \mathcal{C}_f \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f .
2. Montrer que pour tous réels x et T , $f(x + T) = e^{0,173T}f(x)$.
3. On souhaite déterminer le nombre réel T tel que pour tout réel x , $f(x + T) = 2f(x)$.
 - a. Justifier que $f(T) = 2f(0)$.
 - b. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction `T_exp` retourne une valeur approchée à 0,01 près du réel T .

```
1 from math import*
2 def T_exp():
3     T=0
4     y=0.5
5     while ...:
6         T=T+0.01
7         y=0.5*exp(0.173*T)
8     return (...)
```

c. Quelle valeur est affichée par le programme ?

d. En utilisant ce résultat, construire la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 16]$.

Exercice 6. 32 (sujet A p 187) *étude de fonction*

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 2e^x - 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^x - 2x - 2$.

a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier son signe.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout réel x , $2e^x - 1 \geq 2x + 1$.

d. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

a. Pour tout réel x , développer l'expression $(e^x - 1)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

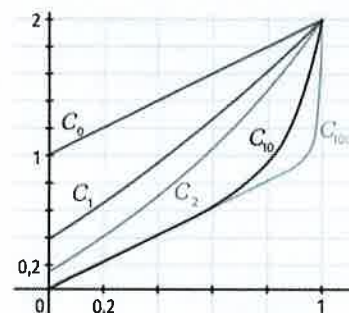
Exercice 6. 33 (Lelivrescolaire 94 p 176) *étude de fonction*

Pour tout entier naturel n , on définit la

fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$.

On note C_n la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante sur $[0; 1]$.



3. Montrer, par le calcul, que toutes les courbes C_n ont un point commun A dont on précisera les coordonnées.

Exercice 6. 34 (136 p 198) *étude de fonction*

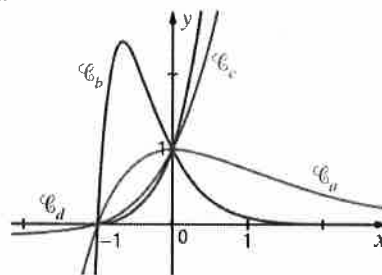
Pour tout entier k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k .

- Vérifier que, pour tout entier k , les points $A(-1; 0)$ et $B(0; 1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
- a. Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.
b. En déduire, pour k un entier donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
- a. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k non nulles. On distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$.
- Le graphique ci-dessous représente quatre courbes correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers $-1, -3, 1$ et 2 .

Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Objectif 6. 3

Exercice 6. 35 (104 p 179) suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{n+1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

Exercice 6. 36 (106 p 179) suite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-0,8x}$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

Exercice 6. 37 (107, 108 p 179) suite

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{5}x}$;
- $f(x) = 100e^{-x+2}$.

Exercice 6. 38 (Barbazo 49 p 198) suite

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale.

La vitesse de la goutte durant sa chute peut être modélisée par la suite (v_n) avec :

$$v_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}n} \right),$$

où :

- n désigne le temps écoulé en seconde depuis que la goutte a quitté le nuage ;
- m désigne la masse de la goutte en mg ;
- k est la constante de frottement de l'air.

On donne $k = 3,9$ et $m = 6$ mg.

- Déterminer la vitesse de la goutte 10 s après sa chute.
- On note (T_n) la suite donnant la variation de la vitesse chaque seconde :

$$T_n = v_{n+1} - v_n.$$

Montrer que (T_n) est une suite géométrique décroissante, puis déterminer à la calculatrice au bout de combien de temps cette variation est négligeable (inférieure à $0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Exercice 6. 39 (Déclic B5 p 207)

Un condensateur de capacité $C = 0,002$ farad, initialement chargé à une tension $E = 10$ volts, se décharge, à partir de l'instant $t = 0$, à travers un circuit de résistance $R = 20\,000$ ohms.

On note u la tension du condensateur en fonction du

temps t exprimé en seconde.

On admet que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$u(t) = E \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Donner une expression de u .
- a. Quelle est la tension au bout de 10 secondes ?
b. Au bout de combien de temps le condensateur sera-t-il à moitié déchargé ?
- a. Étudier le sens de variations de la fonction u .
b. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 6. 40 (110 p 178)

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché un nouveau jouet. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 18]$ par $f(x) = 5xe^{-0,2x}$.

où x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire et $f(x)$ le nombre de milliers de jouets vendus le x -ième jour.

- Démontrer que $f'(x) = (5 - x)e^{-0,2x}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 18]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 18]$.
- Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

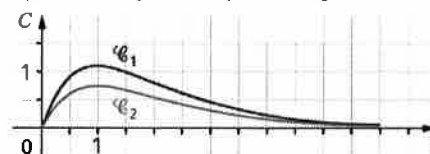


Exercice 6. 41 (Déclic B4 p 207)

Partie A. Étude graphique

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent, pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes, la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre (g/L) et t en heure.



- La fonction C est définie sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$, $C'(t)$ est la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang. À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
- On dit souvent qu'une personne de faible corpulence

subit plus vite les effets de l'alcool.

Identifier sur le graphique la courbe correspondant à la personne la plus corpulente.

Partie B. Un cas particulier

On suppose ici que le taux d'alcool d'une personne, en fonction du temps en heure, est modélisé par $C(t) = 2t \times e^{-t}$ pour $t \in [0; 12]$.

1. Construire le tableau de variations de C sur $[0; 12]$.

2. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

3. Pour les jeunes conducteurs, le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux est supérieur ou égal à 0,2 g/L.

En supposant que la personne est un jeune conducteur, déterminer au bout de combien de temps après avoir consommé de l'alcool le taux d'alcoolémie reprend une valeur conforme à la législation ?

Exercice 6. 42 (112 p 180)

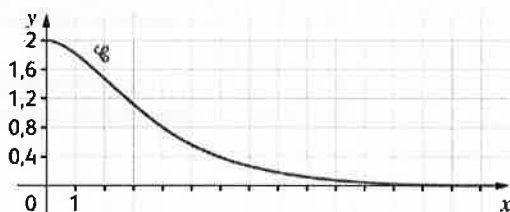
On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t (exprimé en heures). On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, associe $y(t)$ est définie par $y(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Étudier les variations de la fonction y sur $[0; +\infty[$.

2. En déduire au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique est maximale.

Exercice 6. 43 (Déclic 118 p 199)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre (g/L). On obtient la courbe suivante.



1. Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

a. la concentration à l'instant initial ;
b. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L.

2. On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = (t + 2) \times e^{-0,5t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(t)$ est la concentration du médicament dans le sang (en g/L).

a. Justifier que pour tout réel $t \in [0; 15]$, on a :

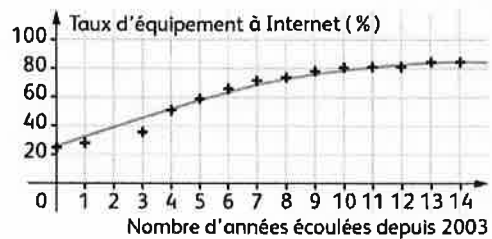
$$f'(t) = -0,5t \times e^{-0,5t}$$

b. En déduire le tableau de variations complet de f .

c. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est strictement inférieure à 0,1 g/L. À l'aide de la calculatrice, déterminer pendant combien de temps le médicament est actif, à 0,1 h près.

Exercice 6. 44 (Déclic 122 p 199)

On modélise le taux d'équipement des ménages français à l'Internet pour l'année $(2003 + x)$ par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{90}{1 + 1,8e^{-0,27x}}$



Source : INSEE

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{43,74e^{-0,27x}}{(1 + 1,8e^{-0,27x})^2}$$

2. Construire le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. Selon le modèle, peut-on considérer que 95 % des ménages français disposeront un jour d'Internet à la maison ?

Exercice 6. 45 (CQFD 80 p 191)

On étudie la croissance du diamètre (en millimètre) d'une certaine plante en fonction de la durée t (en jour).

On propose de confronter deux modèles de croissance aux observations expérimentales.

L'égalité $t = 0$ correspond au début de l'expérience.

A. Modèle de Von Bertalanffy (1901-1972)

La croissance est modélisée par :

$$D_1(t) = 15 - 20e^{-0,5t}$$

1. Étudier les variations de D_1 sur $[0; 10]$.

2. Montrer que pour tout réel t , on a :

$$D_1(t) = 15 - 2D_1'(t)$$

B. Modèle de Verhulst (1804-1849)

La croissance est modélisée par :

$$D_2(t) = \frac{15}{1 + 20e^{-0,5t}}$$

1. Étudier les variations de D_2 sur $[0; 10]$.

2. Montrer que pour tout réel t , on a :

$$D_2'(t) = \frac{1}{30} D_2(t) (15 - D_2(t))$$

C. Confrontation des modèles aux valeurs expérimentales

1. Tracer l'allure des courbes représentatives de D_1 et D_2 sur $[0; 10]$.

On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

2. Les relevés expérimentaux du diamètre D , en mm, en fonction de la durée t (en jour), sont donnés ci-dessous.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1,5	2	2,5	4	6	7,5	9,5	11	12	13

Quel modèle semble le plus adapté à ces données ?

Exercice 6. 46 (Lelivrescolaire 99 p 178)

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail.

La production minimale est de 10 tonnes. On s'intéresse

au bénéfice réalisé, en milliers d'euros, correspondant à la production d'une quantité de q dizaines de tonnes d'aliments.

On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la

fonction B donnée par $B(q) = 10 - \frac{e^{0,2q+1}}{q}$.

1. Sur quel intervalle I est définie B ?

2. a. Démontrer que, pour tout réel $q \in I$:

$$B'(q) = \frac{(1 - 0,2q)e^{0,2q+1}}{q^2}.$$

b. Étudier le signe de $B'(q)$ sur I .

c. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur I .

3. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ? Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?

Exercice 6. 47 (CQFD 74 p 191)

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = 0,4x + 1 + e^{-0,4x+1}.$$

1. Montrer que, pour tout x dans $[0 ; 30]$, on a :

$$f'(x) = 0,4(1 - e^{-0,4x+1}).$$

2. Résoudre dans $[0 ; 30]$ l'inéquation $1 - e^{-0,4x+1} > 0$.

3. En déduire les variations de f sur $[0 ; 30]$.

On donnera l'arrondi à 10^{-2} de $f(0)$ et de $f(30)$.

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à l'effigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0 \leq x \leq 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine d'euros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A..

1. Calculer le coût de fabrication de 100 paquets, puis de 2 000 paquets, à l'euro près.

2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.

a. Soit x dans $[0 ; 30]$.

Montrer que la différence $B(x)$ entre le chiffre d'affaires et le coût de fabrication est de la forme : $mx + p - e^{-0,4x+1}$, où m et p sont des réels à préciser.

b. Déterminer les variations de la fonction B ainsi définie sur $[0 ; 30]$.

c. À l'aide de la calculatrice, indiquer à partir de combien de paquets l'entreprise réalise un bénéfice, au paquet près.

7 Fonctions trigonométriques

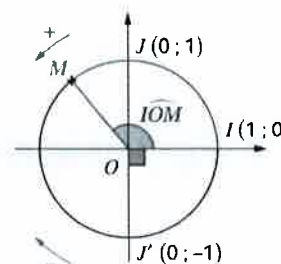
1 Mesurer un angle en radian

On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

Définition 7.1

cercle trigonométrique

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (ie : sens inverse des aiguilles d'une montre) est appelé cercle trigonométrique.



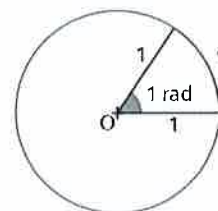
Remarque : - Le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$.

- Si M est un point de $\mathcal{C}$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{IOM}$ en degré qui intercepte cet arc. Cette proportionnalité permet de donner la définition suivante.

Définition 7.2

radian

Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.



Conséquence : $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$; $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

Compléter le tableau suivant :

Exemple 7.1

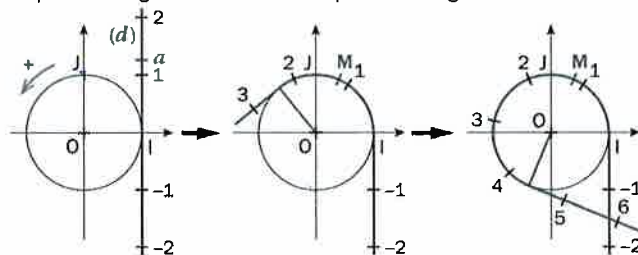
Radian	2π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\frac{2\pi}{9}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi/6$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\pi/4$	$\frac{\pi}{5}$	$\pi/4$
Degré	360	90	60	40	180	150	30	180	240	45	36	135

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Soit (d) la tangente à $\mathcal{C}$ au point I . On définit sur cette droite un repère d'origine I comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Propriété 7.1

A tout nombre réel a on associe, par enroulement de (d) sur $\mathcal{C}$, un unique point M de $\mathcal{C}$ appelé image de a sur $\mathcal{C}$.



Exemple 7.2

- Placer sur le cercle trigonométrique les points associés à 0 ; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π ; $-\pi$; $\frac{3\pi}{2}$.
- Placer sur le cercle trigonométrique les points $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $B\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; $F\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

Remarque : - Avec les notations précédentes a est une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$, orienté de I vers M , noté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

- Le dernier exemple montre que des réels différents peuvent avoir la même image sur $\mathcal{C}$. La propriété suivante permet de caractériser ces réels.

Propriété 7.2

Deux réels x et x' ont le même point image sur $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe un entier k tel que $x = x' + 2k\pi$. Dans ce cas on pourra écrire $x = x' (2\pi)$ pour signifier que x et x' sont égaux à un certain nombre entier de 2π près (ie « tours de cercle » près).

Remarque : - $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ ont pour image J sur $\mathcal{C}$ donc on peut écrire $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} (2\pi)$ mais ça ne veut pas dire que $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$. En effet, $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi \neq -\frac{3\pi}{2}$. Les deux nombres sont égaux à 2π près, c'est à dire à « un tour de cercle près ».

- Tout point M de $\mathcal{C}$ est associé à un nombre réel x (par exemple la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ parcouru dans le sens direct). Alors, d'après la propriété précédente, tout point M de $\mathcal{C}$, associé à un nombre réel x , est également associé à une infinité de réel de la forme $x + 2k\pi$, k dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, si x est une mesure, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$, quelque soit k dans $\mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est aussi une mesure en radian de $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$. Par abus de notation on identifie angle et mesures de cet angle en écrivant $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = x (2\pi)$.

- Parmi les mesures de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ on peut démontrer qu'une seule appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

Exemple 7.3 | Déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est : $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{185\pi}{6}$; $-\frac{127\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{4}$; $\frac{2011\pi}{8}$.

Exemple 7.1:

Radian	2π	$\pi/2$	$\pi/3$	$2\pi/9$	$5\pi/6$	$\pi/8$	π	$4\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$3\pi/4$
Degré	360°	90°	60°	40°	150°	30°	180°	240°	45°	36°	135°

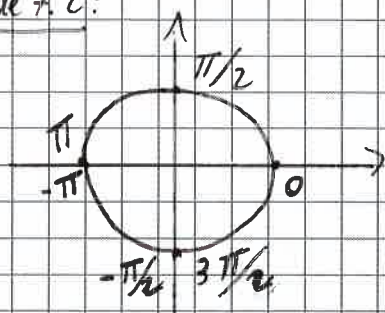
$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$30 \times 5 = 150^\circ$$

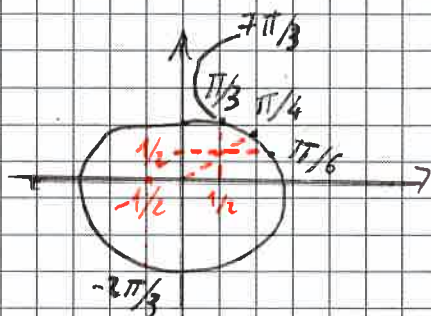
$$\frac{180^\circ}{5}$$

Exemple 7.2:

1.



2.



$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-17\pi}{3} = -\frac{17\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

module 2π
"à un nombre de tour près"

Exemple 7.3:

Mesure principale de $\frac{47\pi}{12}$ Méthode 1:
Naïve

$$\frac{47\pi}{12} = \frac{47\pi}{12} - \frac{24\pi}{12} (2\pi)$$

$$= \frac{23\pi}{12} (2\pi)$$

$$= \frac{23\pi}{12} - \frac{24\pi}{12} (2\pi)$$

$$= -\frac{\pi}{12} (2\pi)$$

Méthode 2: An faling

$$1 \text{ tour} = \frac{24\pi}{12}$$

Idée: chercher un multiple de 24 k + proche de 47.

$$1 \times 24 = 24 \quad 2 \times 24 = 48$$

$$\frac{47\pi}{12} = \frac{47\pi}{12} - \frac{12 \times 24\pi}{12} (2\pi)$$

$$= -\frac{\pi}{12} (2\pi)$$

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

Définition 7.3

$\cos x; \sin x$

Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ associé à x .

- L'abscisse de M est appelée cosinus de x , noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée de M est appelée sinus de x , noté $\sin(x)$.

Exemple 7.4

1. Déterminer les coordonnées du point image de $\frac{\pi}{2}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer $\cos \pi$ et $\sin \pi$.

Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle

La définition précédente prolonge celle donnée dans le triangle rectangle pour le cosinus et le sinus d'un angle aigu.

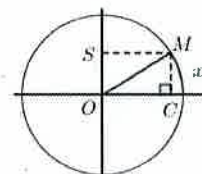
En effet, lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$, les coordonnées de M sont toutes deux positives donc $\cos x > 0$ et

$\sin x > 0$. Par suite, la définition précédente permet d'écrire : $\cos x = OC$ et $\sin x = OS = CM$.

D'autre part les égalités du collège permettent d'écrire :

$$\cos \widehat{COM} = \frac{OC}{OM} = \frac{OC}{1} = OC \text{ et } \sin \widehat{COM} = \frac{CM}{OM} = \frac{CM}{1} = CM.$$

Finalement, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ et $\sin x$ sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{COM}$.

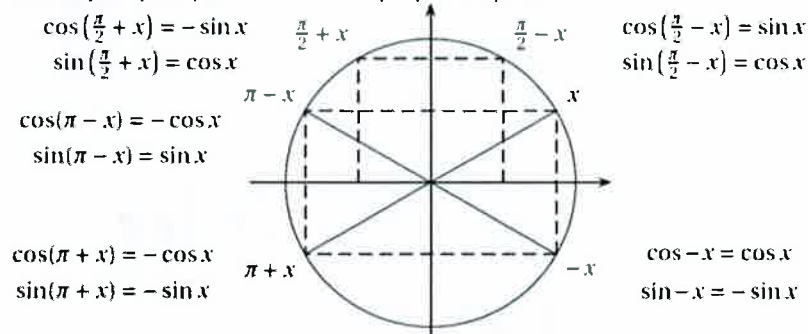


Propriété 7.3

Pour tout réel x on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Remarque : par symétries d'autres propriétés peuvent être démontrées.



Exemple 7.5

1. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos x = 0,6$. Déterminer la valeur de $\sin x$.
2. a. Même question avec $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.
b. En déduire $\sin(-x)$, $\sin(x + 6\pi)$ et $\sin(x - 3\pi)$.

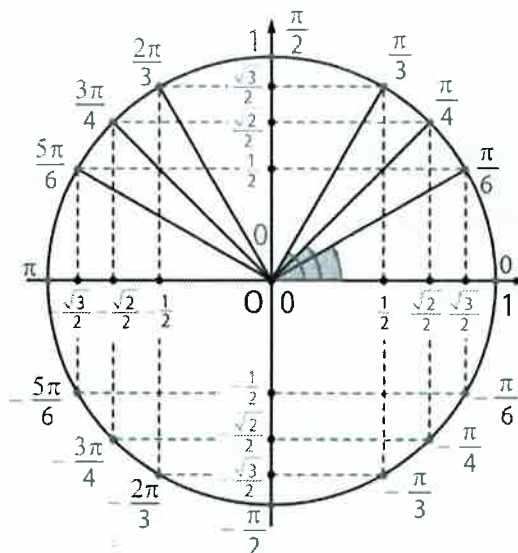
Valeurs remarquables

Les valeurs de ce tableau (cf D1) permettent de compléter le premier quadrant de la figure ci-contre. Les autres s'obtiennent par des propriétés de symétries vues dans la propriété 7.3.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exemple 7.6

Déterminer la valeur exacte de :
 $\cos \frac{2\pi}{3} + \sin(-\frac{5\pi}{6}) + \sin \frac{11\pi}{4}$.



Méthode 3: Avec la calculatrice

- On cherche un encadrement de $\frac{47}{12}$ par 2 entiers consécutifs

$$3 \leq \frac{47}{12} \leq 4$$

- On écrit à $\frac{47\pi}{12}$ le nombre pour $x\pi$

$$\frac{47\pi}{12} = \frac{47\pi}{12} - 4\pi (2\pi)$$

$$= \frac{47\pi}{12} - 4\pi (2\pi) = \frac{-\pi}{12} (2\pi)$$

$\frac{185\pi}{6}$ on cherche le multiple le plus proche de 185: $180 = 6 \times 30$

$$\frac{185\pi}{6} = \frac{185\pi}{6} - 30\pi (2\pi)$$

$$= \frac{185\pi}{6} - \frac{180\pi}{6} (2\pi)$$

$$= \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

Mesure principale: $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{127\pi}{6}$ mesure principale: $\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{127\pi}{6} + 132\pi = \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

Mesure principale de $\frac{2011\pi}{8}$: 8×250

$$\frac{2011\pi}{8} = \frac{2011\pi}{8} - 2000\pi (2\pi)$$

$$= \frac{11\pi}{8} (2\pi) \quad 1 \text{ tour} = \frac{16\pi}{8}$$

$$= \frac{11\pi}{8} - \frac{16\pi}{8} (2\pi)$$

Exemple 7.5:

$$1. \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 0,6^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 0,36 + \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 0,64$$

$$\sin x = -\sqrt{0,64} \text{ ou } \sin x = \sqrt{0,64}$$

$$x \in [0; \pi/2] \text{ donc } \sin x \geq 0$$

$$\text{alors } \sin x = \sqrt{0,64} = 0,8$$

3 Fonctions cosinus et sinus

Définition 7.4

fonction cosinus, fonction sinus

La fonction cosinus est la fonction qui, à tout nombre réel x , associe $\cos(x)$.

La fonction sinus est la fonction qui, à tout nombre réel x , associe $\sin(x)$.

Propriété 7.4

parité, périodicité

La fonction cosinus est paire (ie : domaine de définition $\mathcal{D}$ centré en 0 et $\forall x \in \mathcal{D}$, $\cos(-x) = \cos(x)$)

La fonction sinus est impaire (ie : domaine de définition $\mathcal{D}$ centré en 0 et $\forall x \in \mathcal{D}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$)

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ie : $\forall x \in \mathcal{D}$, $(x + 2\pi) \in \mathcal{D}$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$)

Interprétation graphique

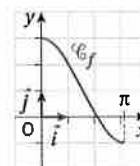
La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et invariante par translations de vecteurs $2k\pi\vec{OI}$, k dans $\mathbb{Z}$.

La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et invariante par translations de vecteurs $2k\pi\vec{OI}$, k dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 7.7

La courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2\cos x$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $[0; \pi]$ dans un repère orthonormé.

1. Etudier la parité de f puis compléter le tracer de C_f sur $[-\pi; 0]$.
2. Etudier la périodicité de f puis compléter le tracer de C_f sur $[\pi; 3\pi]$.



Etude et courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus

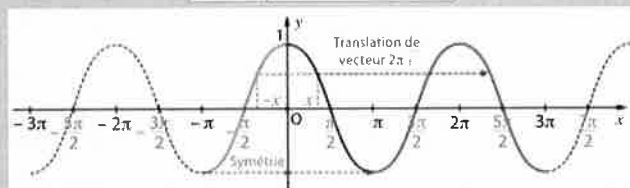
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques donc on peut restreindre leur étude à un intervalle de longueur 2π et compléter sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $2k\pi\vec{OI}$, k dans $\mathbb{Z}$. Pour utiliser la parité prenons un intervalle centré en 0 : $[-\pi; \pi]$.

La fonction cosinus (resp sinus) est paire (resp impaire) donc l'étude sur $[-\pi; \pi]$ peut être restreinte à $[0; \pi]$ puis complétée sur $[-\pi; 0]$ par symétrie d'axe (Oy) (resp de centre O).

Propriété 7.5

Fonction cosinus

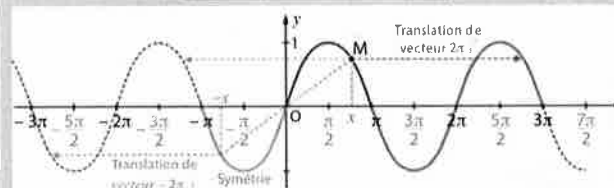
x	0	π
$\cos(x)$	1	-1



variations des fonction cosinus et sinus

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0



Remarque : les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées sinusoïdes.

Exemple 7.8

Démontrer que la fonction f définie dans l'exemple précédent est décroissante sur $[0; \pi]$.

En utilisant la parité et la périodicité de f dresser le tableau de variations de la fonction sur $[-3\pi; \pi]$.

Exemple 7.6 :

$$\bullet \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \sin\frac{11\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\frac{11\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 7.5 (suite) :

2a) Avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ on a $\sin x \leq 0$
 donc $\sin x = -0,8$

b)

$$\bullet \sin(-x) = -\sin x = 0,8$$

$$\bullet \sin(x + 5\pi) = \sin x = -0,8$$

$$\bullet \sin(x - 3\pi) = -\sin x = 0,8$$

D1 – Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

1. En considérant les points I et J du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, déterminer le cosinus et le sinus de 0 et de $\frac{\pi}{2}$.
2. Dans le premier quadrant du repère, l'arc de cercle de centre J et de rayon 1 coupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.
 - a. Justifier que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 - b. On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Démontrer que $OK = \frac{1}{2}$ et $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
3. a. Décrire une construction géométrique du point N du cercle trigonométrique défini par $(\vec{OI}, \vec{ON}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
 - b. Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

CORRIGÉ

1. I(1; 0) correspond à une mesure d'angle nulle, donc on a, par définition, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

De même, J(0; 1) correspond à un angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2. a. Par construction, on a $OJ = OM = JM = 1$. Le triangle OMJ est donc équilatéral.

Donc $\widehat{MOJ} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

Finalement, $\widehat{IOM} = \widehat{IOJ} - \widehat{MOJ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ rad. Donc $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

b. (MK) est un axe de symétrie du triangle équilatéral OMJ. Donc $OK = 0,5 OJ = 0,5$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OMK rectangle en K,

on a $OM^2 = OK^2 + KM^2$. Donc $KM^2 = OM^2 - OK^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $KM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Les coordonnées M sont $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

3. a. Dans le premier quadrant du repère, on trace un arc de cercle de centre I et de rayon 1.

Il coupe le cercle trigonométrique en N.

Le triangle OIN ainsi construit étant équilatéral, on a $(\vec{OI}, \vec{ON}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b. Dans la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, le point O est invariant, et les points I et J sont symétriques. Donc les arcs de cercle construits dans les questions 2. et 3. a. sont aussi symétriques, ainsi que M et N. Donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_N = y_M = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_N = x_M = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Soit P l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et du cercle trigonométrique dans le premier quadrant.

Les angles $\widehat{IOP}$ et $\widehat{POJ}$ étant symétriques par rapport à cette droite, ils ont la même mesure.

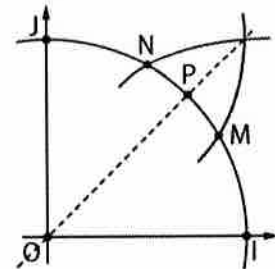
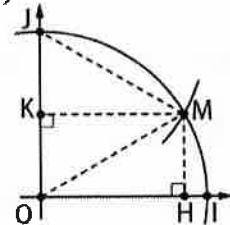
Comme, de plus, leur somme vaut $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit : $(\vec{OI}, \vec{OP}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Le point P appartient au cercle trigonométrique, donc : $x_p^2 + y_p^2 = 1$.

Comme, de plus, P appartient à la droite d'équation $y = x$, on a : $y_p = x_p$.

On en déduit donc que $x_p^2 + y_p^2 = 1$, d'où $2x_p^2 = 1$, d'où $x_p^2 = \frac{1}{2}$.

Or : $x_p > 0$; donc : $x_p = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = x_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_p = x_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Démonstration 1 : Conversion degré/radian

On se place dans la situation du cours, où l'abscisse x du point N sur l'axe $(I; T)$ est positive.

1. Justifier brièvement qu'un angle de 0° correspond à 0 rad.
2. On enroule le demi-axe $[I; T)$ d'un tour complet sur le cercle $\mathcal{C}$ (dans le sens positif).
 - a. Calculer le périmètre du cercle $\mathcal{C}$.
 - b. Donner l'angle en degré et en radian réalisé pour cet enroulement.
3. Remarquons que, pour x dans $[0; 2\pi]$, l'abscisse x de N est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.

On admet que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est proportionnelle à la mesure en degré de l'angle au centre $\widehat{IOM}$.

- a. Déterminer le coefficient de proportionnalité permettant la conversion de degré en radian, et réciproquement, celui permettant la conversion de radian en degré.
- b. Justifier alors l'ensemble des valeurs du tableau du cours.

Démonstration 2 : Unicité de la mesure principale

On considère un point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. On admet qu'il existe une valeur θ' de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui est une mesure en radian associée au point M , et on souhaite démontrer que cette valeur est unique.

On suppose que θ'_1 et θ'_2 sont deux mesures en radian appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ associées au point M : il existe donc un entier relatif k tel que $\theta'_2 = \theta'_1 + 2k\pi$.

1. À quel intervalle appartient $\theta'_1 - \theta'_2$?
2. En déduire la valeur de k et conclure.

Démonstration 3 : Relation fondamentale de la trigonométrie et propriété d'encadrement

1. Démontrer qu'un point $M(x_M; y_M)$ est sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x_M^2 + y_M^2 = 1$.

2. On considère un point M sur le cercle trigonométrique, associé à une mesure x en radian.

Justifier que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, puis en déduire que : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Démonstration 4 : Translation horizontale d'une courbe

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels $\mathcal{D}$ et k un réel.

On considère la fonction g définie pour tout x tel que $x+k \in \mathcal{D}$ par $g(x) = f(x+k)$. On appelle F et G les points appartenant aux courbes représentatives des fonctions f et g respectivement, et d'abscisses respectives $x+k$ et x .

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}$ et vérifier qu'elles ne dépendent que de k .
2. Quelle transformation du plan permet d'obtenir la représentation graphique de g à partir de celle de f ? Préciser les éléments de cette transformation.

Démonstration 4 : Invariance de la courbe d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels $\mathcal{D}$ et T un réel. On suppose que f est T -périodique.

Soit un réel x de $\mathcal{D}$. On considère le point $M(x; f(x))$ appartenant à la courbe représentative de f .

1. Démontrer que le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = -k\vec{i}$ appartient également à la courbe représentative de f .
2. Quelle est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-k\vec{i}$?

Démonstration 5 : Propriétés fonctionnelles de sinus et de cosinus

On considère un point M du cercle trigonométrique correspondant à une mesure x en radian.

1. Justifier que :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

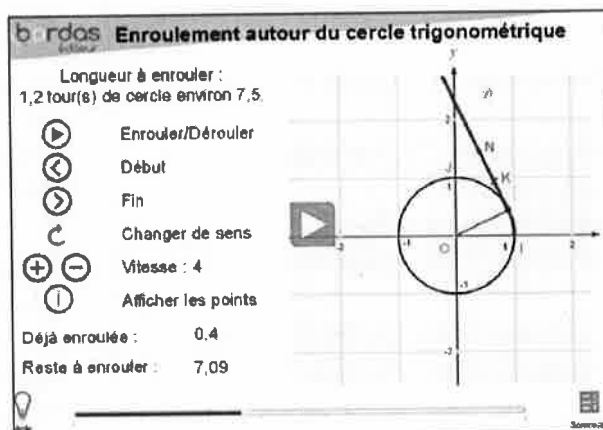
2. On considère le symétrique M_1 du point M par rapport à l'axe des abscisses (OI) .

a. Déterminer, en fonction de x , une mesure en radian associée à M_1 .

b. En raisonnant sur les coordonnées des points M et M_1 du cercle trigonométrique, exprimer $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

Activité 1 : visualiser l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (p 102)

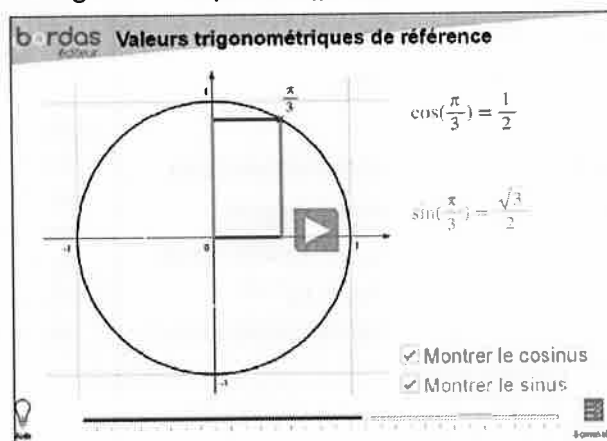
Sur la figure ci-contre se trouvent un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, une droite graduée $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (OI) en I et un point K placé sur la graduation 1 de cette droite. On « enroule » alors la droite $\mathcal{D}$ sur le cercle $\mathcal{C}$. La demi-droite $[IK)$ s'enroule dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, qu'on appelle sens direct ; l'autre demi-droite dans le sens horaire habituel, qu'on appelle sens indirect.



- 1 Quel est le périmètre du cercle $\mathcal{C}$?
En déduire la longueur de l'arc $\widehat{IJ}$ de ce cercle.
- 2 Un point N est placé sur la graduation $\frac{\pi}{2}$ de cette droite. En imaginant l'enroulement de cette droite $\mathcal{D}$ sur le cercle $\mathcal{C}$, sur quel point M du cercle le point N vient-il se placer ? Justifier la réponse, puis la vérifier à l'aide de l'affichage obtenu dans l'animation.
- 3 a. Reprendre la question 2, lorsque le point N est placé sur la graduation $-\frac{\pi}{2}$ de la droite $\mathcal{D}$.
On appelle M' le point obtenu sur le cercle.
b. Quelle symétrie axiale permet de passer du point M au point M' ?
- 4 Donner deux autres nombres réels dont le point image se confond avec le point M du cercle obtenu à la question 2. Trouver un lien entre tous ces nombres.
- 5 Reprendre les questions 2 et 4, lorsque le point N est placé sur la graduation $\frac{3\pi}{4}$ de $\mathcal{D}$.

Activité 2 : découvrir le cosinus et le sinus d'angles remarquables (p 102)

On a représenté une partie du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Le point M est le point image d'un réel α par enroulement de la droite numérique et α est la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{IOM}$.



- 1 Dans cette question, on suppose que le réel α est égal à $\frac{\pi}{3}$.
 - a. Tracer la figure.
 - b. Quelle est la mesure, en degrés, de l'angle α ?
 - c. Quelle est la nature du triangle IOM ?
 - d. Que représente le point H pour le segment $[OI]$? Que vaut alors la longueur OH ?
 - e. En déduire la valeur de $\cos(60^\circ)$.
 - f. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM , déterminer MH . En déduire la valeur de $\sin(60^\circ)$.
- 2 À l'aide de l'animation, visualiser les valeurs des cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Activité 3 : découvrir des propriétés du cosinus et du sinus

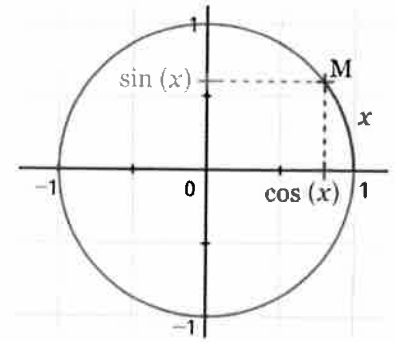
Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$ on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

Pour tout réel x on note M le point associé à x sur $\mathcal{C}$.

L'abscisse de M est le cosinus de x .

L'ordonnée de M est le sinus de x .

Les coordonnées de M sont donc $(\cos x ; \sin x)$.



1. A quel intervalle appartient l'abscisse de M ? Et l'ordonnée ?
2. Quelles sont les coordonnées du point M' , point image du réel $-x$?
On proposera deux écritures différentes.
3. En partant du point M associé à x on effectue un tour complet du cercle trigonométrique dans le sens direct.
 - a. Sur quel point du cercle arrive-t-on ?
 - b. Justifier que le nombre $x + 2\pi$ est associé à ce point.
 - c. Comparer alors $\cos x$ et $\cos(x + 2\pi)$ ainsi que $\sin x$ et $\sin(x + 2\pi)$.
4. Soit M'' le point image du réel $x - \pi$.
 - a. Quelles sont les coordonnées du point M'' ?
 - b. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de M à M'' ?
 - b. En déduire l'expression des coordonnées de M'' en fonction de celles de M .
5. Mêmes questions avec le point M''' image du réel $x + \pi$.

1 Mesurer un angle en radian

Exercice 7. 1 (33 p 202)

Compléter le tableau ci-dessous.

Mesure en degrés		75°		120°	
Mesure en radians	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{5\pi}{4}$

Exercice 7. 2 (36 p 202)

1. Donner la mesure en radians de chacun des angles suivants.

- a. 50° b. 100° c. 150° d. 240°

2. Convertir en degrés les mesures suivantes, données en radians.

- a.
- $\frac{4\pi}{5}$
- b.
- $\frac{7\pi}{9}$
- c. 3 d.
- $\frac{23\pi}{18}$

Exercice 7. 3 (20-22 p 202)

Tracer le cercle trigonométrique puis placer les points images réels proposés par enroulement.

1. a. $\frac{\pi}{3}$ b. $-\frac{4\pi}{3}$ c. $\frac{5\pi}{3}$ d. $\frac{10\pi}{3}$
2. a. $\frac{\pi}{4}$ b. $\frac{8\pi}{4}$ c. $-\frac{7\pi}{4}$ d. $-\frac{9\pi}{4}$
3. a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{11\pi}{6}$ c. $-\frac{7\pi}{6}$ d. $-\frac{13\pi}{6}$

Exercice 7. 4

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure en radian est :

1. $\frac{23\pi}{4}$; 2. $-\frac{50\pi}{3}$; 3. $\frac{1989\pi}{6}$;
4. $-\frac{17\pi}{4}$; 5. $\frac{12\pi}{15}$; 6. 31π .

Exercice 7. 5 (Hatier 53 p 202)

a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 cm, puis placer un point M sur $\mathcal{C}$.b. N est un point de $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{MN}$ mesure 20 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MON}$ arrondie au degré, puis placer le point N.c. Placer le point P de $\mathcal{C}$ tel que P est le symétrique de N par rapport à O. En déduire la longueur de l'arc $\widehat{MP}$ arrondie au dixième de cm.

Exercice 7. 6

Écrire un algorithme demandant en entrée une mesure θ d'un angle orienté et permettant de donner la mesureprincipale de cet angle et le réel k tel que $\theta - 2k\pi$ soit la mesure principale de l'angle.

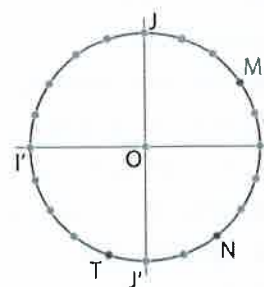
Exercice 7. 7 (24 p 202)

Dans chacun des cas, dire si les points images par enroulement des deux réels proposés sont confondus ou non.

- a. $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ b. $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{32\pi}{8}$
- c. $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{26\pi}{7}$ d. $\frac{17\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$
- e. $\frac{42\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$ f. 1 et $1 - 2\pi$

Exercice 7. 8 (26 – 28 p 202)

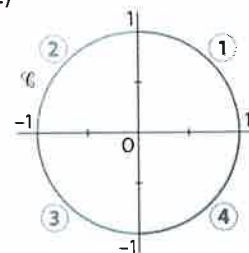
On considère les points M, N et T du cercle trigonométrique partagé en 20 arcs de même mesure ci-contre. Indiquer si l'affirmation proposée est juste ou fausse. Justifier.

1. M est le point image par enroulement des nombres réels de la forme $\frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.2. T est le point image du réel $\frac{27\pi}{5}$.3. N est le point image du réel $-\frac{23\pi}{10}$.

Exercice 7. 9 (29 – 31 p 202)

On considère le cercle trigonométrique ci-contre, partagé en quatre arcs de même mesure.

Pour chaque exercice, dire sur quel arc de cercle se trouvent les points images par enroulement des réels donnés.



1. a. $\frac{7\pi}{4}$ b. $-\frac{5\pi}{8}$ c. $-\frac{19\pi}{10}$ d. $\frac{16\pi}{3}$
2. a. $-\frac{7\pi}{12}$ b. $\frac{17\pi}{9}$ c. $\frac{17\pi}{7}$ d. $-\frac{25\pi}{4}$
3. a. 1 b. 3 c. 5 d. 7

Exercice 7. 10 (32 p 202)

Donner tous les réels de l'intervalle $]-4\pi; 4\pi]$ qui ont pour image par enroulement le même point du cercle trigonométrique que le réel $\frac{5\pi}{6}$.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Exercice 7. 11 (45 p 203)

Parmi les cinq réels suivants, quatre ont le même cosinus.

Quel est l'intrus ?

- $\frac{\pi}{5}$ $\frac{9\pi}{5}$ $\frac{21\pi}{5}$ $-\frac{11\pi}{5}$ $\frac{14\pi}{5}$

Exercice 7. 12 (46 p 203)

Parmi les cinq réels suivants, quatre ont le même sinus.

Quel est l'intrus ?

- $\frac{\pi}{7}$ $-\frac{8\pi}{7}$ $\frac{20\pi}{7}$ $\frac{13\pi}{7}$ $-\frac{13\pi}{7}$

Exercice 7. 13 (Déclic 64 p 225)

1. Déterminer le signe des nombres suivants.

- a. $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$ b. $\cos \frac{5\pi}{8}$ et $\sin \frac{5\pi}{8}$
 c. $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$ d. $\cos \frac{-\pi}{7}$ et $\sin \frac{-\pi}{7}$

2. Vérifier à la calculatrice réglée en mode radian.

Exercice 7. 14 (71 p 205)1. Convertir $\frac{2\pi}{5}$ radians en degrés.2. Dessiner le cercle trigonométrique puis placer les points images par enroulement des réels : $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

3. Calculer alors sans calculatrice l'expression :

$$A = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

Exercice 7. 15

1. Calculer $\sin \alpha$ sachant que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $\cos \alpha = 0,6$.
 2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = 0,8$. Déterminer $\sin x$.
 3. Soit $x \in \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$ tel que $\cos x = -0,9$. Déterminer $\sin x$.

Exercice 7. 16 (49 p 203)À partir de l'encadrement connu de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$, déterminer un encadrement des nombres suivants.

- a. $A = 3 \sin(x)$
 b. $B = \cos(x) + \sin(x)$
 c. $C = \sin(x) - 4 \cos(x)$

Exercice 7. 17Soit n un entier relatif. Donner le cosinus et le sinus des réels : $2n\pi$; $(2n+3)\pi$; $n\pi$; $-\frac{\pi}{2} + (2n-5)\pi$.**Exercice 7. 18**

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 ; \\ B &= (1 + \cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2(1 + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha) ; \\ C &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha ; \\ D &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha - 1. \end{aligned}$$

Exercice 7. 19 (64 – 66 p 204)

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants en se ramenant à des valeurs remarquables.

- a. $-\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{17\pi}{4}$ c. $-\frac{121\pi}{6}$
 d. $\frac{13\pi}{3}$ e. $-\frac{5\pi}{4}$ f. $\frac{13\pi}{6}$
 g. $\frac{7\pi}{3}$ h. $\frac{15\pi}{4}$ i. $\frac{2019\pi}{6}$

Exercice 7. 20 (70 p 204)

1. Calculer la valeur exacte des réels A et B.

$$A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Comparer A et B. Expliquer le résultat en plaçant les points associés aux réels 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique.**Exercice 7. 21** (78 p 205)Sur le cercle trigonométrique, placer les points A et B images par enroulement des réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

1. Donner les coordonnées de A et B.
 2. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de A à B ?
 3. Plus généralement, si M est le point associé au réel x , où se trouve le point N associé à $x + \pi$?
 4. Recopier et compléter les propriétés :
 « Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = \dots\dots\dots$ »
 « Pour tout réel x , $\sin(x + \pi) = \dots\dots\dots$ »

Exercice 7. 22 (79 p 205)Sur le cercle trigonométrique, placer les points A et B images par enroulement des réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

1. Donner les coordonnées de A et B.
 2. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de A à B ?
 3. Plus généralement, si M est le point associé au réel x , où se trouve le point N associé à $\pi - x$?
 4. Recopier et compléter les propriétés :
 « Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = \dots\dots\dots$ »
 « Pour tout réel x , $\sin(\pi - x) = \dots\dots\dots$ »

Exercice 7. 23 (59 p 204)1. Rappeler les valeurs remarquables de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.2. En remarquant que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.3. En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.**Exercice 7. 24**Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$ les réels :

$$A = \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(2007\pi - x) ;$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x - \pi) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) ;$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \sin(\pi + x) ;$$

$$D = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos(-x - \pi) + 5 \sin(-x).$$

Exercice 7. 25

$$\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.**Exercice 7. 26**

Résoudre l'équation :

$$1. \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dans } \left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right] ;$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dans } [-2\pi; 3\pi] ;$$

3. $2 \sin^2 3x + 3 \cos 3x = 0$ dans $\left[-3\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 7. 27 (105 p 214)

On se propose de résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = -1$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1. Montrer que, pour tout réel x ,
 $(\cos(x) + \sin(x) + 1)^2 = 2(1 + \cos(x))(1 + \sin(x))$.
2. En déduire les solutions de l'équation proposée.

Exercice 7. 28

1. Résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; 5\pi]$.
2. Résoudre l'inéquation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$.
3. a. Factoriser le trinôme $-4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$.
b. Étudier le signe de $2 \cos x + 1$ et de $-2 \cos x + \sqrt{3}$ sur $[0; 2\pi]$.
c. En déduire le signe de $-4 \cos^2 x + (2\sqrt{3} - 2) \cos x + \sqrt{3}$.

Exercice 7. 29

1. Résoudre l'équation $4 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$ et dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre l'équation $\sin x = 2 \sin^3 x$ dans $[0; 4\pi]$.
3. Résoudre l'inéquation $-1 < \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$ dans $[-2\pi; \pi]$.

Exercice 7. 30

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les équations :

- a. $\cos(t) = \sin(2t)$;
- b. $\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- c. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

Exercice 7. 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit M un point du distinct de O .

On pose $OM = r$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ (2π).

Soit N le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 et de la demi-droite $[OM)$.

N vérifie donc l'égalité vectorielle $(E) : \overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{ON}$.

1. Justifier que $(\vec{i}; \overrightarrow{ON}) = \theta$ (2π). En déduire les coordonnées de N en fonction de θ .
2. Déduire de (E) et de la question précédente que M a pour coordonnées $(r \cos \theta; r \sin \theta)$.

Partie B

Soit C le cercle de centre O et de rayon 2, A le point de coordonnées $(2; 0)$ et B le point de C tel que

$(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Démontrer que I a pour coordonnées $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a. Démontrer que I est un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
b. Quelle est la mesure principale de $(\vec{i}; \overrightarrow{OI})$?
c. En déduire que I a également pour coordonnées $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}; \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{11\pi}{8}$, $\sin \frac{11\pi}{8}$, $\cos -\frac{\pi}{8}$, $\sin -\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7. 32 (Déclic 95 p 228)

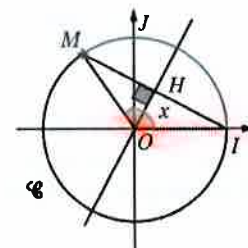
Cosinus et sinus de l'angle moitié

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

Partie A. Établissement de formules

Soit un réel $x \in [0; \pi]$.

On note M le point du cercle $\mathcal{C}$ associé à x , et H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIM .



1. a. Rappeler les coordonnées des points I et M .
b. En déduire la distance IM en fonction de x .
2. Démontrer que $MH = \sin \frac{x}{2}$.
3. En déduire l'expression de $\sin \frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$.
4. Démontrer que $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.

Partie B. Cas général

Expliquer comment on peut calculer $\cos \frac{x}{2}$ et $\sin \frac{x}{2}$ à partir des formules précédentes dans le cas où x est un réel quelconque, pas forcément dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Partie C. Applications numériques

1. Justifier les résultats obtenus par le logiciel Xcas ci-contre.
2. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de :
 $\frac{7\pi}{8}$; $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$
3. Vérifier à la calculatrice.

1	$\cos(\pi/8)$
	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$
2	$\sin(\pi/8)$
	$\frac{\sqrt{-(\sqrt{2})+2}}{2}$

3 Fonctions cosinus et sinus

Exercice 7. 33 (Barbazo 32 p 102)

Chacune des courbes tracées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction.

- Dans chaque cas, conjecturer la périodicité et la parité des fonctions.

