

CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°1
Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re
Thèmes : Suites + Probabilités et variable aléatoire

PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	C	D	B	A	C	D	B	A	C	D	B	A

Justifications :

Q1. $u_n = u_0 + n \times r$ donc $u_{10} = 7 + 10 \times (-2) = 7 - 20 = \mathbf{-13}$.

Q2. Somme de 5 termes d'une suite géométrique : $S = v_0 \times (1 - q^5)/(1 - q) = 3 \times (1 - 32)/(1 - 2) = 3 \times 31 = \mathbf{93}$.

Q3. $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 3 = \mathbf{6x^2 - 10x + 3}$.

Q4. $\Delta = 25 - 24 = 1$; racines $(5 \pm 1)/2$ donc **2 et 3**. Vérification : $2+3=5$ et $2 \times 3=6$. ✓

Q5. $P_A(B) = P(A \cap B) / P(A) = 0,2 / 0,4 = \mathbf{0,5}$.

Q6. A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Or $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B)$. Donc A et B sont **indépendants**.

Q7. $E(X) = -2 \times 0,3 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 = -0,6 + 0,5 + 0,8 = \mathbf{0,7}$.

Q8. $5\pi/6 = \pi - \pi/6$ donc $\cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = \mathbf{-\sqrt{3}/2}$.

Q9. $u \cdot v = x \times x' + y \times y' = 3 \times 4 + (-2) \times 1 = 12 - 2 = \mathbf{10}$.

Q10. $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3 + m \times (-6) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \mathbf{1}$.

Q11. Avec remise : $p(R) = 3/5$ et $p(V) = 2/5$. $P(\text{« exactement une R »}) = 2 \times (3/5) \times (2/5) = \mathbf{12/25}$.

Q12. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ atteint son minimum en $x = -b/(2a) = 6/2 = \mathbf{3}$.

Exercice 1 — Suites arithmétiques (7 pts)

1. Chaque mois, 25 livres sont ajoutés au fonds existant. Donc :

$$u_1 = 850 + 25 = \mathbf{875}$$

$$u_2 = 875 + 25 = \mathbf{900}$$

$$u_3 = 900 + 25 = \mathbf{925}$$

2. Pour tout entier naturel n , on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant 25. Donc $u_{n+1} = u_n + 25$.

La suite (u_n) est donc **arithmétique de premier terme $u_0 = 850$ et de raison $r = 25$** .

3. Pour une suite arithmétique : $u_n = u_0 + n \times r$, donc **$u_n = 850 + 25n$** .

4. Du 1^{er} janvier 2026 au 1^{er} janvier 2028, il s'écoule 24 mois. Le nombre de livres sera donc $u_{24} = 850 + 25 \times 24 = 850 + 600 = \mathbf{1\ 450\ livres}$.

5. On cherche n tel que $u_n \geq 1\ 500$:

$$850 + 25n \geq 1\ 500$$

$$25n \geq 650$$

$$n \geq 26$$

Le plus petit entier n vérifiant l'inéquation est **$n = 26$** . L'objectif sera atteint au bout de **26 mois**, soit le **1^{er} mars 2028**.

6. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{23}$ est la somme de 24 termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Formule : $S = (\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) / 2$

$$u_{23} = 850 + 25 \times 23 = 850 + 575 = 1\ 425$$

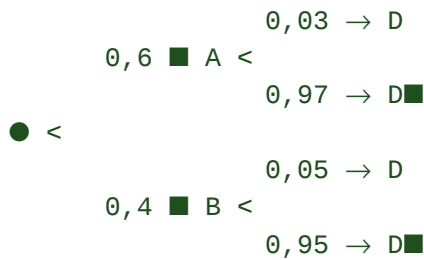
$$S = 24 \times (850 + 1\ 425) / 2 = 24 \times 2\ 275 / 2 = 12 \times 2\ 275 = \mathbf{27\ 300}$$

Non, cette somme ne représente pas le nombre total de livres présents sur les 24 premiers mois (qui serait $u_{23} = 1\ 425$ au 1^{er} décembre 2027). $S = 27\ 300$ représente **la somme cumulée mois après mois du nombre de livres présents** dans la bibliothèque, soit en quelque sorte un total « livres $\times$ mois » utile pour calculer par exemple un nombre moyen mensuel.

Exercice 2 — Probabilités et variable aléatoire (7 pts)

Partie A

1. Arbre pondéré :



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,6 \times 0,03 = \mathbf{0,018}$.

3. Les événements A et B forment une partition de l'univers (un composant provient soit de A, soit de B). D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$

$$P(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,05$$

$$P(D) = 0,018 + 0,020 = \mathbf{0,038} \checkmark$$

4. On cherche $P_D(B)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un composant provienne de la ligne B sachant qu'il est défectueux :

$$P_D(B) = P(B \cap D) / P(D) = 0,020 / 0,038 \approx \mathbf{0,526}$$

Autrement dit, parmi les composants défectueux, environ 52,6 % proviennent de la ligne B.

Partie B

1. Si le composant est **non défectueux** (probabilité $1 - 0,038 = 0,962$), l'entreprise gagne 12 €. Si le composant est **défectueux** (probabilité 0,038), elle perd 5 € (remboursement de 12 € – pénalité de 5 € : $12 - 12 - 5 = -5$, ou plus directement : pas de recette + pénalité = -5).

Loi de probabilité de X :

x_i	-5	12
$P(X = x_i)$	0,038	0,962

2. $E(X) = -5 \times 0,038 + 12 \times 0,962 = -0,19 + 11,544 = \mathbf{11,354 \text{ €}}$.

Interprétation : sur un grand nombre de composants vendus, l'entreprise réalise en moyenne un gain de **11,354 €** par composant. Comme $E(X) > 0$, l'activité est rentable malgré les pénalités liées aux composants défectueux.

3. Sur 1 000 composants vendus, le gain total espéré est :

$$1\,000 \times E(X) = 1\,000 \times 11,354 = \mathbf{11\,354 \text{ €}}$$