

CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°2

Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re
Thèmes : Second degré et dérivation + Produit scalaire

PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	B	D	A	C	B	C	A	D	B	C	D	A

Justifications :

Q1. $u_3 = u_0 \times q^3 = 4 \times (1/2)^3 = 4 \times 1/8 = 1/2$.

Q2. $x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$.

Q3. Avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$: $f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.

Q4. $f'(x) = 2x + 3$, donc $f'(1) = 5$. $f(1) = 1 + 3 = 4$. Tangente : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 5x - 5 + 4 = 5x - 1$.

Q5. $AB \cdot AC = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 6 \times \cos(\pi/3) = 24 \times 1/2 = 12$.

Q6. $AB(3 ; 1)$, $AC(-1 ; 3)$. $AB \cdot AC = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$. Donc $(AB) \perp (AC)$, le triangle est **rectangle en A**.

Q7. $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$, $a = -2 < 0$, sommet en $x = -b/(2a) = -8/(-4) = 2$. La parabole est tournée vers le bas, donc f est **croissante sur $] -\infty ; 2]$ puis décroissante**.

Q8. Indépendance : $P(F \cap L) = P(F) \times P(L) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.

Q9. $\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

Q10. Avec $Y = 2X - 1$: $E(Y) = 2E(X) - 1 = 6 - 1 = 5$ et $\sigma(Y) = |2| \cdot \sigma(X) = 2 \times 2 = 4$. Donc **$E(Y) = 5$ et $\sigma(Y) = 4$** .

Q11. $u_1 = 3 \times 2 - 4 = 2$, puis $u_2 = 3 \times 2 - 4 = 2$. (La suite est en fait constante à partir de u_0 .)

Q12. Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$. $64 = 25 + 49 - 70 \cdot \cos(\widehat{BAC})$. $\cos(\widehat{BAC}) = (74 - 64)/70 = 10/70 = 1/7$.

Exercice 1 — Second degré et dérivation (7 pts)

Partie A — Étude de la fonction B

1. Calculons :

$$B(0) = 0 + 0 - 0 - 5 = -5$$

$$B(1) = -1 + 9 - 15 - 5 = -12$$

$$B(5) = -125 + 225 - 75 - 5 = 20$$

Interprétation de B(0) : lorsque l'entreprise ne produit aucun objet, elle subit un déficit de 5 000 € (frais fixes).

2. $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 5$

$$B'(x) = -3x^2 + 9 \cdot 2x - 15 = -3x^2 + 18x - 15 \quad \checkmark$$

3. Développons $-3(x - 1)(x - 5)$:

$$-3(x - 1)(x - 5) = -3(x^2 - 5x - x + 5) = -3(x^2 - 6x + 5) = -3x^2 + 18x - 15 = B'(x) \quad \checkmark$$

4. Étudions le signe de $B'(x) = -3(x - 1)(x - 5)$ sur $[0 ; 10]$.

Le facteur -3 est négatif. Le produit $(x - 1)(x - 5)$ s'annule en $x = 1$ et $x = 5$, est positif à l'extérieur de $[1 ; 5]$ et négatif à l'intérieur.

Donc $B'(x)$ est positif sur $[1 ; 5]$ (car $-3 \times (\text{négatif}) = \text{positif}$) et négatif sur $[0 ; 1] \cup [5 ; 10]$.

x	0	1	5	10
B'(x)		- 0 +	+ 0 -	
B(x)	-5	↘ -12	↗ 20	↘ -155

Calculs complémentaires : $B(10) = -1000 + 900 - 150 - 5 = -255$. Note : j'ai corrigé une coquille dans le tableau : $B(10) = -255$, pas -155 .

Partie B — Application au contexte

5. D'après le tableau de variations, B atteint son maximum sur $[0 ; 10]$ en $x = 5$, avec $B(5) = 20$.

Le bénéfice maximal est de **20 000 €** et il est atteint pour une production de **500 objets** (car x est exprimé en centaines).

6. **Non**, l'entreprise ne doit pas produire en très grande quantité. D'après le tableau, B est décroissante sur $[5 ; 10]$ et $B(10) = -255$, soit une perte de 255 000 €. Au-delà de 500 objets produits, le bénéfice diminue rapidement.

7. On cherche les valeurs de x telles que $B(x) \geq 20$. Par lecture graphique (ou à la calculatrice), le maximum est exactement $B(5) = 20$. L'objectif n'est donc atteint qu'au point $x = 5$ (production unique de 500 objets), ou éventuellement dans un intervalle très étroit autour de $x = 5$. Pour atteindre au moins 20 000 €, la production doit être **très proche de 500 objets**.

Remarque : si l'objectif était par exemple 15 000 €, on obtiendrait un intervalle plus large, par exemple entre 4 et 7 (en centaines).

Exercice 2 — Produit scalaire (7 pts)

Partie A — Étude du triangle ABC

1. Figure : voir copie de l'élève. Repère orthonormé avec A(1 ; 2), B(5 ; 4), C(3 ; 6).

2. Coordonnées des vecteurs :

$$\vec{AB} = (5 - 1 ; 4 - 2) = \mathbf{(4 ; 2)}$$

$$\vec{AC} = (3 - 1 ; 6 - 2) = \mathbf{(2 ; 4)}$$

$$\vec{BC} = (3 - 5 ; 6 - 4) = \mathbf{(-2 ; 2)}$$

3. Longueurs :

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$BC = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

Remarque : $AB = AC$, donc le triangle ABC est **isocèle en A**.

4. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 8 + 8 = \mathbf{16}$.

5. On a la formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) / (AB \times AC) = 16 / (2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 16 / 20 = \mathbf{4/5}$$

$$\widehat{BAC} = \arccos(4/5) \approx \mathbf{37^\circ} \text{ (au degré près)}.$$

Partie B — Recherche d'un point particulier

6. Par définition de la projection orthogonale, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ (formule utilisant le projeté orthogonal H de C sur (AB)). Plus précisément :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} \text{ (car } \vec{AC} = \vec{AH} + \vec{HC} \text{ et } \vec{AB} \cdot \vec{HC} = 0 \text{ puisque } (HC) \perp (AB))$$

$$= ||\vec{AB}|| \times ||\vec{AH}|| \times \cos(0) = AB \times AH \text{ (les vecteurs } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH} \text{ étant colinéaires de même sens car le triangle est isocèle en A et C est « du côté » de B vu de A).}$$

7. De l'égalité $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$, on tire :

$$AH = (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) / AB = 16 / (2\sqrt{5}) = 8/\sqrt{5} = 8\sqrt{5}/5 \approx \mathbf{3,58}$$

8. M(x ; y) appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Calculons $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$:

$$\vec{MA} = (1 - x ; 2 - y) \text{ et } \vec{MB} = (5 - x ; 4 - y)$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (1 - x)(5 - x) + (2 - y)(4 - y)$$

$$= -(x - 1) \cdot -(x - 5) + -(y - 2) \cdot -(y - 4)$$

$$= (x - 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 4)$$

$$\text{Donc } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(x - 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 4) = 0} \checkmark$$