

CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°3
Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re
Thèmes : Étude de fonction + Suites numériques

PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	D	A	C	B	D	B	C	A	D	B	A	C

Justifications :

Q1. $f(x) = 3 + 2 \cdot (1/x)$. La dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$. Donc $f'(x) = 2 \times (-1/x^2) = -2/x^2$.

Q2. $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$; $u_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$; $u_3 = 2 \times 7 + 1 = 15$.

Q3. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0$. L'équation n'a **aucune** solution réelle.

Q4. Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,5 = 0,12 + 0,35 = 0,47$.

Q5. $\cos(x) = 1/2 = \cos(\pi/3)$. Les solutions sur $[0 ; 2\pi]$ sont $x = \pi/3$ et $x = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$. Donc **$\{\pi/3 ; 5\pi/3\}$** .

Q6. Identité remarquable : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 = 9 + 2 \times (-2) + 25 = 9 - 4 + 25 = 30$.

Q7. Somme : $S = v_1 \times (1 - q^5)/(1 - q) = 1 \times (1 - 243)/(1 - 3) = -242/-2 = 121$.

Q8. $E(X) = 0 \times 1/2 + 2 \times 1/2 = 1$. $V(X) = 1/2 \times (0-1)^2 + 1/2 \times (2-1)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$.

Q9. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Tangentes horizontales en **0 et 2**.

Q10. $P(\text{au moins un pile}) = 1 - P(\text{aucun pile}) = 1 - (1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4$.

Q11. $MA \cdot MB = 0$ caractérise les points M tels que le triangle MAB soit rectangle en M, soit le **cercle de diamètre [AB]** (privé de A et B).

Q12. $u_0 = 2$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2 \dots$ La suite oscille, elle n'est **ni croissante ni décroissante**.

Exercice 1 — Étude de fonction (7 pts)

Partie A — Étude de la fonction f

1. Calculs :

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + 10 = \mathbf{10}$$

$$f(2) = 8 - 36 + 48 + 10 = \mathbf{30}$$

$$f(4) = 64 - 144 + 96 + 10 = \mathbf{26}$$

2. f est un polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 9 \cdot 2x + 24 = \mathbf{3x^2 - 18x + 24}$.

3. Développons $3(x - 2)(x - 4)$:

$$3(x - 2)(x - 4) = 3(x^2 - 4x - 2x + 8) = 3(x^2 - 6x + 8) = 3x^2 - 18x + 24 = f'(x) \checkmark$$

4. Signe de $f'(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ sur $[0 ; 8]$:

Le facteur 3 est positif. Le produit $(x - 2)(x - 4)$ s'annule en 2 et 4, est positif à l'extérieur de $[2 ; 4]$ et négatif à l'intérieur. Donc :

- $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 2[\cup]4 ; 8]$: f est croissante
- $f'(x) < 0$ sur $]2 ; 4[$: f est décroissante

x	0	2	4	8
f'(x)		+ 0 -	- 0 +	
f(x)	10	↗ 30	↘ 26	↗ 138

$$\text{Calcul : } f(8) = 512 - 576 + 192 + 10 = \mathbf{138}.$$

5. Sur $[0 ; 8]$:

- Le **maximum** de f est **f(8) = 138**, atteint en $x = 8$.
- Le **minimum** de f est **f(0) = 10**, atteint en $x = 0$.

Remarque : 30 (en $x=2$) est un maximum local et 26 (en $x=4$) un minimum local, mais sur l'intervalle entier le min et le max sont aux extrémités.

Partie B — Tangente et équation

6. Équation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

$$f(1) = 1 - 9 + 24 + 10 = 26$$

$$f'(1) = 3 - 18 + 24 = 9$$

$$T : y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = 9(x - 1) + 26 = \mathbf{9x + 17}$$

7. Résoudre $f(x) = 10$ sur $[0 ; 8]$:

$$x^3 - 9x^2 + 24x + 10 = 10$$

$$x^3 - 9x^2 + 24x = 0$$

$$x(x^2 - 9x + 24) = 0$$

Soit $x = 0$, soit $x^2 - 9x + 24 = 0$. Pour ce second facteur : $\Delta = 81 - 96 = -15 < 0$, donc pas de solution réelle.

L'unique solution sur $[0 ; 8]$ est **x = 0**.

Exercice 2 — Suites numériques (7 pts)

Partie A — Étude de la suite (C_n)

1. Au bout d'un an :

Intérêts : $5\,000 \times 0,03 = 150$ €

Capital après intérêts : $5\,000 + 150 = 5\,150$ €

Retrait de 100 € : $C_1 = 5\,150 - 100 = \mathbf{5\,050\text{ €}}$

De même : $C_2 = 1,03 \times 5\,050 - 100 = 5\,201,5 - 100 = \mathbf{5\,101,50\text{ €}}$

2. Chaque année, le capital est multiplié par 1,03 (intérêts à 3 %) puis on retire 100 €. Donc :

$$C_{n+1} = 1,03 \times C_n - 100$$

3. La suite n'est **ni arithmétique ni géométrique** :

• $C_1 - C_0 = 50$ et $C_2 - C_1 = 51,50 \neq 50 \rightarrow$ non arithmétique.

• $C_1/C_0 = 1,01$ et $C_2/C_1 \approx 1,0102 \neq 1,01 \rightarrow$ non géométrique.

Partie B — Suite auxiliaire

4. $v_0 = C_0 - 10\,000/3 = 5\,000 - 10\,000/3 = 15\,000/3 - 10\,000/3 = \mathbf{5\,000/3 \approx 1\,666,67}$.

5. Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= C_{n+1} - 10\,000/3 \\ &= (1,03 \cdot C_n - 100) - 10\,000/3 \\ &= 1,03 \cdot C_n - 100 - 10\,000/3 \\ &= 1,03 \cdot (v_n + 10\,000/3) - 100 - 10\,000/3 \\ &= 1,03 \cdot v_n + 1,03 \times 10\,000/3 - 100 - 10\,000/3 \\ &= 1,03 \cdot v_n + (1,03 - 1) \times 10\,000/3 - 100 \\ &= 1,03 \cdot v_n + 0,03 \times 10\,000/3 - 100 \\ &= 1,03 \cdot v_n + 100 - 100 \\ &= \mathbf{1,03 \cdot v_n} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est **géométrique de raison $q = 1,03$** et de premier terme $v_0 = 5\,000/3$.

6. Pour une suite géométrique : $v_n = v_0 \times q^n$, donc :

$$v_n = (5\,000/3) \times 1,03^n$$

$$\text{et donc : } C_n = v_n + 10\,000/3 = (5\,000/3) \times 1,03^n + 10\,000/3$$

Partie C — Application numérique

7. Au bout de 10 ans :

$$\begin{aligned} C_{10} &= (5\,000/3) \times 1,03^{10} + 10\,000/3 \\ &\approx 1\,666,67 \times 1,3439 + 3\,333,33 \\ &\approx 2\,239,84 + 3\,333,33 \\ &\approx \mathbf{5\,573\text{ €}} \end{aligned}$$

8. $v_n = (5\,000/3) \times 1,03^n$ est croissante (car $v_0 > 0$ et $1,03 > 1$), donc $C_n = v_n + 10\,000/3$ est aussi **croissante**. Le capital augmente d'année en année (les intérêts dépassent toujours les retraits, car $0,03 \times C_n > 100$ dès lors que $C_n > 100/0,03 \approx 3\,333$ €, ce qui est toujours le cas).