

CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°4

Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re

Thèmes : Trigonométrie/Produit scalaire + Probabilités et variable aléatoire

PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	A	C	B	D	A	D	C	B	A	D	B	C

Justifications :**Q1.** $\sin(3\pi/4) = \sin(\pi - \pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.**Q2.** $P_B(A) = P(A \cap B) / P(B) = 0,15 / 0,3 = \mathbf{0,5}$.**Q3.** Somme des n premiers entiers : $S = n(n+1)/2 = 50 \times 51 / 2 = \mathbf{1\ 275}$.**Q4.** Pour $Y = aX + b$: $\sigma(Y) = |a| \cdot \sigma(X) = |3| \times 2 = \mathbf{6}$.**Q5.** $v = -2 \times u$, donc **colinéaires et opposés** (de sens contraires). Vérification : $2 \times 6 - (-3) \times (-4) = 12 - 12 = 0$ (déterminant nul = colinéarité).**Q6.** $f(x) = 5x^2 - 3 \cdot (1/x)$. $f'(x) = 10x - 3 \cdot (-1/x^2) = \mathbf{10x + 3/x^2}$.**Q7.** $u_n = u_0 + nr$. $u_8 - u_3 = 5r$ donc $22 - 7 = 5r \Rightarrow r = \mathbf{3}$.**Q8.** A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. $P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = \mathbf{0,7}$.**Q9.** $\sin(x) = -1/2 = \sin(-\pi/6)$. Solutions sur $[-\pi ; \pi]$: $x = -\pi/6$ ou $x = \pi - (-\pi/6) = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$, mais $7\pi/6 \notin [-\pi ; \pi]$. Donc $x = -\pi/6$ ou $x = -\pi + \pi/6 = -5\pi/6$ (par symétrie). Donc **$\{-\pi/6 ; -5\pi/6\}$** .**Q10.** $E(Y) = E(-3X + 5) = -3 \cdot E(X) + 5 = -3 \times 4 + 5 = -12 + 5 = \mathbf{-7}$.**Q11.** Par définition du carré scalaire : $u \cdot u = \mathbf{\|u\|^2}$.**Q12.** $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout x. La fonction cos est donc **paire**.

Exercice 1 — Trigonométrie et produit scalaire (7 pts)

Partie A — Trigonométrie

1. Valeurs :

$$f(0) = 2 \cdot \cos(0) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = \mathbf{3}$$

$$f(\pi/3) = 2 \cdot \cos(\pi/3) + 1 = 2 \cdot (1/2) + 1 = \mathbf{2}$$

$$f(\pi/2) = 2 \cdot \cos(\pi/2) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = \mathbf{1}$$

$$f(\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 1 = 2 \cdot (-1) + 1 = \mathbf{-1}$$

$$f(2\pi/3) = 2 \cdot \cos(2\pi/3) + 1 = 2 \cdot (-1/2) + 1 = \mathbf{0}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 2\cos(-x) + 1 = 2\cos(x) + 1 = f(x)$. Donc **f est paire**.

Conséquence : sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + 1 = 2\cos(x) + 1 = f(x)$. Donc **f est périodique de période 2π** .

4. Résoudre $f(x) = 2$ dans $[0 ; 2\pi]$:

$$2\cos(x) + 1 = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = 1/2$$

$$\text{Sur } [0 ; 2\pi] : \cos(x) = 1/2 \Leftrightarrow \mathbf{x = \pi/3 \text{ ou } x = 5\pi/3}.$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$, donc $-1 \leq f(x) \leq 3$.

• Le **maximum** est 3, atteint quand $\cos(x) = 1$, soit pour $\mathbf{x = 2k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• Le **minimum** est -1, atteint quand $\cos(x) = -1$, soit pour $\mathbf{x = \pi + 2k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Partie B — Produit scalaire

6. $AB \cdot AC = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 3 \times \cos(\pi/3) = 12 \times 1/2 = \mathbf{6}$.

7. Formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$

$$BC^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos(\pi/3) = 25 - 24 \times (1/2) = 25 - 12 = 13$$

$$\text{Donc } \mathbf{BC = \sqrt{13} \approx 3,61}.$$

8. Utilisons Al-Kashi pour l'angle B (opposé au côté $b = AC$) :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{B})$$

$$9 = 16 + 13 - 2 \times 4 \times \sqrt{13} \times \cos(\widehat{B})$$

$$9 = 29 - 8\sqrt{13} \cdot \cos(\widehat{B})$$

$$8\sqrt{13} \cdot \cos(\widehat{B}) = 20$$

$$\cos(\widehat{B}) = 20 / (8\sqrt{13}) = 5/(2\sqrt{13}) = 5\sqrt{13}/26 \approx 0,693$$

$$\widehat{B} \approx \mathbf{46^\circ}$$

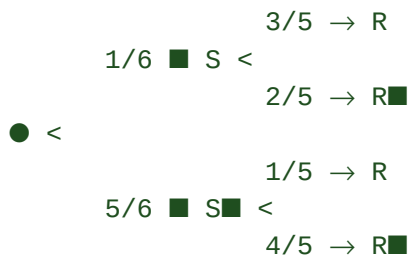
Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$\widehat{C} = 180^\circ - 60^\circ - 46^\circ = \mathbf{74^\circ}.$$

Exercice 2 — Probabilités et variable aléatoire (7 pts)

Partie A — Étude des probabilités

1. Arbre pondéré :



2. $P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R) = 1/6 \times 3/5 = \mathbf{3/30 = 1/10}$.

3. Les événements S et S forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(S \cap R) + P(S \cap R) \\ &= P(S) \times P_S(R) + P(S) \times P_{S}(R) \\ &= 1/6 \times 3/5 + 5/6 \times 1/5 \\ &= 3/30 + 5/30 \\ &= 8/30 = \mathbf{4/15} \end{aligned}$$

4. On cherche $P_R(S)$:

$$P_R(S) = P(S \cap R) / P(R) = (1/10) / (4/15) = (1/10) \times (15/4) = 15/40 = \mathbf{3/8}$$

Soit environ **0,375**, ou **0,38** au centième près.

Partie B — Étude d'une variable aléatoire

5. Si la carte est rouge (gain de 10 €) : $X = 10 - 5 = 5$.

Si la carte est noire (gain de 0 €) : $X = 0 - 5 = -5$.

Donc X prend bien les valeurs **-5 et 5**.

6. Loi de probabilité de X :

$$P(X = 5) = P(R) = 4/15$$

$$P(X = -5) = P(R) = 1 - 4/15 = 11/15$$

x_i	-5	5
$P(X = x_i)$	11/15	4/15

7. Espérance :

$$E(X) = -5 \times 11/15 + 5 \times 4/15 = -55/15 + 20/15 = -35/15 = -7/3 \approx \mathbf{-2,33 \text{ €}}$$

Comme $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable au joueur**. En moyenne, le joueur perd environ 2,33 € par partie.

8. Sur 200 parties, l'espérance de gain du forain (qui est l'opposé de celle du joueur) :

$$\text{Gain attendu du forain} = -200 \times E(X) = -200 \times (-7/3) = 1\,400/3 \approx \mathbf{467 \text{ €}} \text{ par jour}$$

Le forain peut espérer un bénéfice journalier d'environ 467 €.