

**CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°5**

Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re  
Thèmes : Fonction exponentielle + Suites + Variable aléatoire

**PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)**

| Question | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Réponse  | <b>B</b> | <b>A</b> | <b>D</b> | <b>C</b> | <b>A</b> | <b>D</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>A</b> | <b>C</b> | <b>B</b> |

**Justifications :**

**Q1.** Propriété :  $e^a \times e^b = e^{a+b}$ . Donc  $e^{2x} \times e^{-x} = e^{2x + (-x)} = e^x$ .

**Q2.**  $u_n = u_0 + n \times r$  donc  $u_{10} = -3 + 10 \times 5 = -3 + 50 = 47$ .

**Q3.**  $(3e^x)' = 3e^x$  et  $(x^2)' = 2x$ . Donc  $f'(x) = 3e^x + 2x$ .

**Q4.**  $P_A(B) = P(A \cap B) / P(A) = 0,12 / 0,4 = 0,3$ .

**Q5.** La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $e^0 = 1$ . Donc  $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ . L'ensemble des solutions est  **$]0 ; +\infty[$** .

**Q6.**  $7\pi/6 = \pi + \pi/6$ , donc  $\cos(7\pi/6) = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ .

**Q7.**  $E(X) = -3 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 5 \times 0,3 = -0,6 + 0 + 1,5 = 0,9$ .

**Q8.**  $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\pi/4) = 4 \times 3 \times (\sqrt{2}/2) = 12 \times \sqrt{2}/2 = 6\sqrt{2}$ .

**Q9.**  $\Delta = 49 - 48 = 1$ . Racines :  $(7 \pm 1)/2 = 3$  et **4**. Vérification :  $3+4=7$  et  $3 \times 4=12$  ✓.

**Q10.**  $v_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$ .

**Q11.** Propriété fondamentale : la fonction exp est **strictement croissante sur  $\mathbb{R}$**  (sa dérivée  $e^x$  est toujours strictement positive).

**Q12.** Indépendance :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$ .  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,6 - 0,3 = 0,8$ .

## Exercice 1 — Fonction exponentielle (7 pts)

### Partie A — Étude de la fonction f

1.  $f(0) = 5 \times e^{-0,4 \times 0} = 5 \times e^0 = 5 \times 1 = 5$ .

**Interprétation** : au moment de l'injection ( $t = 0$ ), la concentration de médicament dans le sang vaut 5 mg/L.

2.  $f(t) = 5 \times e^{-0,4t}$ . La dérivée de  $e^{at}$  est  $a \times e^{at}$ , donc :

$$f'(t) = 5 \times (-0,4) \times e^{-0,4t} = -2 \times e^{-0,4t} \checkmark$$

3. Signe de  $f'(t)$  :

Pour tout  $t \in [0 ; +\infty[$ , on a  $e^{-0,4t} > 0$  (l'exponentielle est toujours strictement positive). Donc  $f'(t) = -2 \times e^{-0,4t} < 0$ .

La fonction f est donc **strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$** .

4. Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on a  $-0,4t \rightarrow -\infty$ , donc  $e^{-0,4t} \rightarrow 0$ , et par conséquent  $f(t) \rightarrow 0$ .

**Interprétation médicale** : à long terme, le médicament est totalement éliminé du sang du patient : sa concentration tend vers 0.

### Partie B — Application au contexte médical

5.  $f(2) = 5 \times e^{-0,4 \times 2} = 5 \times e^{-0,8} \approx 5 \times 0,4493 \approx \mathbf{2,25 \text{ mg/L}}$ .

6. On cherche t tel que  $f(t) > 1$ , c'est-à-dire  $5 \times e^{-0,4t} > 1$ .

À la calculatrice (table de valeurs ou graphique de f), on observe que :

- $f(4) \approx 5 \times e^{-1,6} \approx 1,01$
- $f(5) \approx 5 \times e^{-2,0} \approx 0,68$

Le médicament est donc efficace pendant environ **4 heures**.

7. Résoudre  $f(t) = 2,5$  :

$$5 \times e^{-0,4t} = 2,5$$

$$e^{-0,4t} = 0,5$$

$$-0,4t = \ln(0,5)$$

$$t = -\ln(0,5) / 0,4$$

$$t = \ln(2) / 0,4 \approx 0,693 / 0,4 \approx \mathbf{1,7 \text{ heures}}$$

Soit environ 1 heure et 42 minutes après l'injection.

## Exercice 2 — Suites géométriques et variable aléatoire (7 pts)

### Partie A — Suite et population

1. Une augmentation de 8 % correspond à une multiplication par 1,08.

$$T_1 = 200 \times 1,08 = \mathbf{216} \text{ tortues}$$

$$T_2 = 216 \times 1,08 = 233,28, \text{ soit environ } \mathbf{233} \text{ tortues}$$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on passe de  $T_n$  à  $T_{n+1}$  en multipliant par 1,08 (augmentation de 8 % par an). Donc :

$$T_{n+1} = 1,08 \times T_n$$

La suite  $(T_n)$  est donc **géométrique de premier terme  $T_0 = 200$  et de raison  $q = 1,08$** .

3. Pour une suite géométrique :  $T_n = T_0 \times q^n$ , donc :

$$\mathbf{T_n = 200 \times 1,08^n}$$

4. Au bout de 10 ans :

$$T_{10} = 200 \times 1,08^{10} \approx 200 \times 2,1589 \approx \mathbf{432} \text{ tortues.}$$

5. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $T_n > 500$  :

$$200 \times 1,08^n > 500 \Leftrightarrow 1,08^n > 2,5$$

À la calculatrice (table de valeurs) :

- $1,08^{11} \approx 2,332$  (donc  $T_{11} \approx 466$ )

- $1,08^{12} \approx 2,518$  (donc  $T_{12} \approx 504$ )

Au bout de **12 ans**, la population dépassera 500 individus : l'espèce sera considérée comme sauvée.

### Partie B — Variable aléatoire

6.  $X$  suit la loi suivante :

| $x_i$        | 0   | 1   |
|--------------|-----|-----|
| $P(X = x_i)$ | 0,3 | 0,7 |

7. Calculs :

$$E(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,7 = \mathbf{0,7}$$

$$V(X) = 0,3 \times (0 - 0,7)^2 + 0,7 \times (1 - 0,7)^2$$

$$= 0,3 \times 0,49 + 0,7 \times 0,09$$

$$= 0,147 + 0,063$$

$$= \mathbf{0,21}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,21} \approx \mathbf{0,46}$$

*Remarque* : on peut aussi utiliser la formule  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (0 \times 0,3 + 1 \times 0,7) - 0,7^2 = 0,7 - 0,49 = 0,21$ .

8. **Interprétation de  $E(X) = 0,7$**  : sur un grand nombre d'œufs pondus, en moyenne, 7 sur 10 donneront naissance à une tortue. Autrement dit, la probabilité moyenne qu'un œuf devienne une tortue est de 0,7, soit 70 %.