

CORRIGÉ - Sujet d'entraînement n°6

Épreuve anticipée de mathématiques - Spécialité 1re

Thèmes : Étude de fonction avec exponentielle + Produit scalaire et trigonométrie

PREMIÈRE PARTIE — Corrigé du QCM (6 pts)

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	D	C	A	B	D	A	C	B	A	B	C	D

Justifications :

Q1. L'exponentielle est strictement croissante donc injective : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
Donc $x = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Q2. Pour $f(x) = e^{kx}$, on a $f'(x) = k \cdot e^{kx}$. Donc $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$.

Q3. On a $u_7 - u_3 = (7 - 3) \times r = 4r$. Donc $27 - 11 = 16 = 4r$, soit $r = 4$.

Q4. Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B) = 0,3$.

Q5. $11\pi/6 = 2\pi - \pi/6$, donc $\sin(11\pi/6) = \sin(-\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Q6. $u \cdot v = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$.

Q7. $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. En $x = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Tangente : $y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$.

Q8. Pour $Y = aX + b$: $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$. Avec $a = 3$: $V(Y) = 9 \times 4 = 36$.

Q9. $u_9 = 1 + 9 \times 2 = 19$. Somme de 10 termes consécutifs : $S = 10 \times (1 + 19)/2 = 100$.

Q10. Sommet de la parabole en $x = -b/(2a) = 8/(2 \times 2) = 2$. Comme $a = 2 > 0$, c'est bien un minimum.

Q11. L'exponentielle est strictement croissante : $e^x < e^{2x-1} \Leftrightarrow x < 2x - 1 \Leftrightarrow 1 < x$.
Solutions : **]1 ; +∞[**.

Q12. Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,3 = 0,16 + 0,24 = 0,4$.

Exercice 1 — Étude d'une fonction avec exponentielle (7 pts)

Partie A — Étude des variations de f

1. Calculs :

$$f(0) = (0 - 2) \times e^0 = -2 \times 1 = \mathbf{-2}$$

$$f(1) = (1 - 2) \times e^1 = -1 \times e = \mathbf{-e \approx -2,72}$$

$$f(2) = (2 - 2) \times e^2 = 0 \times e^2 = \mathbf{0}$$

2. $f(x) = (x - 2) \times e^x$. On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$$u(x) = x - 2, \text{ donc } u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^x, \text{ donc } v'(x) = e^x$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^x + (x - 2) \times e^x \\ &= e^x \times (1 + x - 2) \\ &= \mathbf{(x - 1) e^x} \checkmark \end{aligned}$$

3. Signe de $f'(x) = (x - 1) \times e^x$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $(x - 1)$:

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(1) = 0$

4. Tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow -e \nearrow$	

5. D'après le tableau, f atteint son **minimum en $x = 1$** , et ce minimum vaut $f(1) = \mathbf{-e \approx -2,72}$.

Partie B — Tangente et équation

6. Équation de la tangente T au point d'abscisse 0 :

$$f(0) = -2 \text{ et } f'(0) = (0 - 1) \times e^0 = -1.$$

$$T : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = -1 \times x + (-2) = \mathbf{-x - 2}$$

7. À la calculatrice (graphique de f), la courbe coupe l'axe des abscisses en **un seul point**, situé en $x = 2$.

8. Démonstration algébrique : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2) e^x = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Or $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (l'exponentielle ne s'annule jamais), donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet bien une **unique solution**, qui est $x = 2$.

Exercice 2 — Produit scalaire et trigonométrie (7 pts)

Partie A — Calcul d'angle dans un triangle

1. Figure : voir copie de l'élève (placer $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$, $C(2 ; -1)$ sur un repère orthonormé).

2. Coordonnées des vecteurs :

$$\vec{AB} = (3 - (-1) ; 4 - 2) = \mathbf{(4 ; 2)}$$

$$\vec{AC} = (2 - (-1) ; -1 - 2) = \mathbf{(3 ; -3)}$$

3. Longueurs :

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \mathbf{3\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{4.} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 3 + 2 \times (-3) = 12 - 6 = \mathbf{6}.$$

5. Avec la formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$:

$$\cos(\widehat{BAC}) = (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) / (AB \times AC) = 6 / (2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}) = 6 / (6\sqrt{10}) = \mathbf{1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10}$$

Valeur approchée : $\cos(\widehat{BAC}) \approx 0,3162$, donc $\widehat{BAC} \approx \mathbf{71,6^\circ}$.

Partie B — Trigonométrie

6. Valeurs :

$$g(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = \mathbf{1}$$

$$g(\pi/4) = \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \mathbf{\sqrt{2}}$$

$$g(\pi/2) = \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$g(\pi) = \sin(\pi) + \cos(\pi) = 0 + (-1) = \mathbf{-1}$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Donc :

$$g(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin(x) + \cos(x) = g(x) \quad \checkmark$$

La fonction g est donc **périodique de période 2π** .

8. Résoudre $\sin(x) = \cos(x)$ sur $[0 ; 2\pi]$:

Sur le cercle trigonométrique, $\sin(x) = \cos(x)$ signifie que le point image M de x a même abscisse et même ordonnée. Ces points sont situés sur la droite d'équation $y = x$, qui coupe le cercle trigonométrique en deux points :

- En $x = \pi/4$ (où $\cos = \sin = \sqrt{2}/2$)
- En $x = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$ (où $\cos = \sin = -\sqrt{2}/2$)

L'ensemble des solutions est donc **$\{\pi/4 ; 5\pi/4\}$** .