

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet d'entraînement n°2

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Thèmes : QCM pluri-thèmes + Second degré et dérivation + Produit scalaire

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point.

Question 1.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 1/2$. Le terme u_3 est égal à :

A.	B.	C.	D.
1/4	1/2	2	6

Question 2.

La forme canonique de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est :

A.	B.	C.	D.
$(x - 4)^2 - 13$	$(x + 2)^2 - 1$	$(x - 2)^2 + 1$	$(x - 2)^2 - 1$

Question 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
$6x^2 + 2x - 6$	$4x$	$2x^2 + 1$	$6x^2 - 6$

Question 4.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

A.	B.	C.	D.
$y = 5x + 4$	$y = 4x$	$y = 5x - 1$	$y = 2x + 2$

Question 5.

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et l'angle $\widehat{BAC} = \pi/3$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :

A.	B.	C.	D.
6	12	$12\sqrt{3}$	24

Question 6.

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 2)$, $C(0 ; 4)$. Le triangle ABC est :

A.	B.	C.	D.
équilateral	isocèle non rectangle	rectangle en A	quelconque

Question 7.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ est :

A.	B.	C.	D.
croissante sur $] -\infty ; 2]$ puis décroissante	croissante sur $\mathbb{R}$	décroissante sur $\mathbb{R}$	décroissante sur $] -\infty ; 2]$ puis croissante

Question 8.

Dans une classe, 30 % des élèves portent des lunettes et 60 % sont des filles. Sachant que ces deux caractères sont indépendants, la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit une fille portant des lunettes est :

A.	B.	C.	D.
0,90	0,30	0,50	0,18

Question 9.

La valeur exacte de $\sin(-\pi/3)$ est :

A.	B.	C.	D.
$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/2$

Question 10.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 3$ et d'écart-type $\sigma(X) = 2$. Soit $Y = 2X - 1$. Alors :

A.	B.	C.	D.
$E(Y) = 5$ et $\sigma(Y) = 3$	$E(Y) = 6$ et $\sigma(Y) = 4$	$E(Y) = 5$ et $\sigma(Y) = 4$	$E(Y) = 2$ et $\sigma(Y) = 1$

Question 11.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La valeur de u_2 est :

A.	B.	C.	D.
-4	0	6	2

Question 12.

Dans un triangle ABC, on a $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 8$. La valeur de $\cos(\widehat{BAC})$ est :

A.	B.	C.	D.
$1/7$	0	$1/2$	$2/7$

Exercice 1 — Étude d'une fonction : second degré et dérivation (7 pts)

Une entreprise fabrique et vend des objets connectés. Le bénéfice mensuel (en milliers d'euros) réalisé pour la production et la vente de x centaines d'objets (avec $0 \leq x \leq 10$) est modélisé par la fonction B définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 5$$

Partie A — Étude de la fonction B

1. Calculer $B(0)$, $B(1)$ et $B(5)$. Interpréter $B(0)$ dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que pour tout $x \in [0 ; 10]$:
 $B'(x) = -3x^2 + 18x - 15$
3. Vérifier que $B'(x)$ peut se factoriser sous la forme $B'(x) = -3(x - 1)(x - 5)$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0 ; 10]$ et dresser le tableau de variations de B sur cet intervalle.

Partie B — Application au contexte

5. Pour quelle production l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?
6. L'entreprise doit-elle produire en très grande quantité ? Justifier votre réponse à l'aide du tableau de variations.
7. Le directeur souhaite que le bénéfice atteigne au moins 20 000 €. À l'aide de la calculatrice (ou d'une lecture graphique), déterminer un intervalle approximatif de production permettant d'atteindre cet objectif. Arrondir les bornes à l'unité.

Aide au calcul :

$$\begin{aligned} B(0) &= -5 ; B(1) = -1 + 9 - 15 - 5 = -12 \\ B(5) &= -125 + 225 - 75 - 5 = 20 \\ B'(1) &= -3 + 18 - 15 = 0 \\ B'(5) &= -75 + 90 - 15 = 0 \\ -3(x-1)(x-5) &= -3(x^2 - 6x + 5) = -3x^2 + 18x - 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Exercice 2 — Produit scalaire dans un repère orthonormé (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; i, j)$. On considère les points :

- A(1 ; 2)
- B(5 ; 4)
- C(3 ; 6)

Partie A — Étude du triangle ABC

1. Faire une figure soignée représentant les points A, B et C dans le repère (prendre 1 cm pour 1 unité).
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs AB, AC et BC.
3. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Donner les valeurs exactes.
4. Calculer le produit scalaire $AB \cdot AC$.
5. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$, puis une mesure approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Partie B — Recherche d'un point particulier

6. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Montrer que $AB \cdot AC = AB \times AH$.
7. En déduire la valeur de AH.
8. Soit M un point du plan de coordonnées $(x ; y)$. Démontrer que M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si :

$$(x - 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 4) = 0$$

(On pourra utiliser la propriété : M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $MA \cdot MB = 0$.)

Aide au calcul :

$$AB(4 ; 2) \text{ donc } AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AC(2 ; 4) \text{ donc } AC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AB \cdot AC = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 8 + 8 = 16$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = 16 / (2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 16/20 = 4/5$$

$$\arccos(4/5) \approx 37^\circ$$