

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet d'entraînement n°3

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Thèmes : QCM pluri-thèmes + Étude de fonction et dérivation + Suites

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point.

Question 1.

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3 + 2/x$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
$2/x^2$	$-2/x$	$1/x^2$	$-2/x^2$

Question 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. La valeur de u_3 est :

A.	B.	C.	D.
15	11	8	5

Question 3.

Le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^2 - 3x + 5 = 0$ est :

A.	B.	C.	D.
une	deux	aucune	une infinité

Question 4.

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,4$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. La probabilité $P(B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,12	0,47	0,35	0,9

Question 5.

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = 1/2$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est :

A.	B.	C.	D.
$\{\pi/6\}$	$\{\pi/3\}$	$\{\pi/6 ; 11\pi/6\}$	$\{\pi/3 ; 5\pi/3\}$

Question 6.

Soient u et v deux vecteurs tels que $\|u\| = 3$, $\|v\| = 5$ et $u \cdot v = -2$. La valeur de $\|u + v\|^2$ est :

A.	B.	C.	D.
----	----	----	----

38	30	34	26
----	----	----	----

Question 7.

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $q = 3$. La somme $v_1 + v_2 + \dots + v_5$ est :

A.	B.	C.	D.
81	162	121	243

Question 8.

Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = 0) = 1/2$ et $P(X = 2) = 1/2$. La variance $V(X)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
1	2	1/2	4

Question 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Les abscisses des points où la tangente à la courbe représentative de f est horizontale sont :

A.	B.	C.	D.
0 seulement	2 seulement	-1 et 2	0 et 2

Question 10.

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

A.	B.	C.	D.
1/2	3/4	1/4	2/3

Question 11.

Soient $A(0 ; 0)$ et $B(4 ; 0)$. L'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $MA \cdot MB = 0$ est :

A.	B.	C.	D.
le cercle de diamètre $[AB]$	la droite (AB)	la médiatrice de $[AB]$	le segment $[AB]$

Question 12.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n \times 2$. Cette suite est :

A.	B.	C.	D.
croissante	décroissante	ni croissante ni décroissante	constante

Exercice 1 — Étude d'une fonction et application (7 pts)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 8]$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 10$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0 ; 8]$.
3. Vérifier que $f'(x) = 3(x - 2)(x - 4)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 8]$ et dresser le tableau de variations complet de f sur cet intervalle.
5. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[0 ; 8]$ et les valeurs de x où ils sont atteints.

Partie B — Tangente et équation

6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
7. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$. (*Indication : factoriser $f(x) - 10$ en utilisant que 0 est solution évidente.*)

Aide au calcul :

$$\begin{aligned} f(0) &= 10 ; f(2) = 8 - 36 + 48 + 10 = 30 ; f(4) = 64 - 144 + 96 + 10 = 26 \\ f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ 3(x - 2)(x - 4) &= 3(x^2 - 6x + 8) = 3x^2 - 18x + 24 \quad \checkmark \\ f(1) &= 1 - 9 + 24 + 10 = 26 ; f'(1) = 3 - 18 + 24 = 9 \\ x^3 - 9x^2 + 24x &= x(x^2 - 9x + 24) \end{aligned}$$

Exercice 2 — Suites numériques et modélisation (7 pts)

Un investisseur place 5 000 € sur un livret d'épargne au taux annuel de 3 %. Chaque année, l'investisseur retire 100 € de son compte juste après le versement des intérêts.

On note C_n le capital sur le compte au bout de n années. On a donc $C_0 = 5\,000$.

Partie A — Étude de la suite (C_n)

1. Calculer C_1 et C_2 .

2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = 1,03 \times C_n - 100$$

3. La suite (C_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

Partie B — Suite auxiliaire

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = C_n - 100/0,03$, c'est-à-dire $v_n = C_n - 10\,000/3$.

4. Calculer v_0 . Donner une valeur approchée au centième.

5. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.

6. En déduire l'expression de v_n puis de C_n en fonction de n .

Partie C — Application numérique

7. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur du capital au bout de 10 ans. Arrondir à l'euro.

8. L'investisseur souhaite savoir si son capital va croître ou décroître au fil des années. Justifier votre réponse à partir de l'expression de C_n .

Aide au calcul :

$$C_1 = 1,03 \times 5\,000 - 100 = 5\,150 - 100 = 5\,050$$

$$C_2 = 1,03 \times 5\,050 - 100 = 5\,201,5 - 100 = 5\,101,50$$

$$10\,000/3 \approx 3\,333,33$$

$$v_0 = 5\,000 - 3\,333,33 \approx 1\,666,67$$

$$1,03^{10} \approx 1,3439$$