

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet d'entraînement n°4

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Thèmes : QCM pluri-thèmes + Trigonométrie/Produit scalaire + Probabilités et variable aléatoire

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point.

Question 1.

La valeur exacte de $\sin(3\pi/4)$ est :

A.	B.	C.	D.
$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$

Question 2.

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,15$. La probabilité $P_B(A)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,3	0,15	0,5	0,45

Question 3.

La somme $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$ vaut :

A.	B.	C.	D.
1 250	1 275	1 225	2 550

Question 4.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 5$ et d'écart-type $\sigma(X) = 2$. Soit $Y = 3X - 1$. L'écart-type $\sigma(Y)$ est égal à :

A.	B.	C.	D.
2	5	14	6

Question 5.

Les vecteurs $u(2 ; -3)$ et $v(-4 ; 6)$ sont :

A.	B.	C.	D.
colinéaires et opposés	orthogonaux	colinéaires et de même sens	ni colinéaires ni orthogonaux

Question 6.

La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 5x^2 - 3/x$ est :

A.	B.	C.	D.
$10x - 3$	$10x - 3/x^2$	$10x + 3$	$10x + 3/x^2$

Question 7.

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et $u_8 = 22$. Sa raison est :

A.	B.	C.	D.
2	4	3	5

Question 8.

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,5$. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,9	0,7	0,2	0,1

Question 9.

Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin(x) = -1/2$ admet pour solutions :

A.	B.	C.	D.
$-\pi/6$ et $-5\pi/6$	$\pi/6$ et $5\pi/6$	$-\pi/3$ et $-2\pi/3$	$-\pi/6$ seulement

Question 10.

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 4$. Pour $Y = -3X + 5$, on a :

A.	B.	C.	D.
$E(Y) = 7$	$E(Y) = 17$	$E(Y) = 12$	$E(Y) = -7$

Question 11.

Le carré scalaire d'un vecteur u vaut :

A.	B.	C.	D.
$\ u\ $	$\ u\ ^2$	$2\ u\ $	0

Question 12.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ est :

A.	B.	C.	D.
impaire	ni paire ni impaire	paire	à la fois paire et impaire

Exercice 1 — Trigonométrie et produit scalaire (7 pts)

Partie A — Trigonométrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + 1$.

1. Calculer $f(0)$, $f(\pi/3)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$ et $f(2\pi/3)$.
2. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
3. Démontrer que f est périodique de période 2π .
4. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation $f(x) = 2$.
5. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de x ces extrema sont-ils atteints ?

Partie B — Produit scalaire

On considère un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \pi/3$.

6. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
7. En utilisant la formule d'Al-Kashi, calculer la longueur BC.
8. En déduire les mesures des angles ABC et ACB. Arrondir au degré près.

Aide au calcul :

$$f(0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 ; f(\pi/3) = 2 \cdot (1/2) + 1 = 2$$

$$f(\pi/2) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 ; f(\pi) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 ; f(2\pi/3) = 2 \cdot (-1/2) + 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos(\pi/3) = 12 \times 1/2 = 6$$

$$BC^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\pi/3) = 25 - 12 = 13, \text{ donc } BC = \sqrt{13}$$

Exercice 2 — Probabilités et variable aléatoire (7 pts)

Dans une fête foraine, un stand propose un jeu de hasard se déroulant en deux étapes :

Étape 1 : on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat est un 6, on tire ensuite une carte dans l'urne U_1 ; sinon, on tire une carte dans l'urne U_2 .

Étape 2 : l'urne U_1 contient 3 cartes rouges et 2 cartes noires. L'urne U_2 contient 1 carte rouge et 4 cartes noires.

On note les événements :

- **S** : « obtenir un 6 au dé » ;
- **R** : « tirer une carte rouge ».

Partie A — Étude des probabilités

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap R)$, la probabilité d'obtenir un 6 au dé et de tirer une carte rouge.
3. Calculer $P(R)$. On donnera la valeur exacte sous forme de fraction.
4. Sachant qu'une carte rouge a été tirée, quelle est la probabilité que le résultat du dé ait été un 6 ? On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

Partie B — Étude d'une variable aléatoire

Le joueur paie 5 € pour participer. Il gagne 10 € si la carte tirée est rouge et 0 € sinon. On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur (différence entre ce qu'il reçoit et les 5 € engagés).

5. Justifier que X prend les valeurs -5 et 5.
6. Déterminer la loi de probabilité de X .
7. Calculer l'espérance $E(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.
8. Le forain réalise 200 parties par jour. Quel gain (ou perte) journalier peut-il espérer pour son stand ?

Aide au calcul :

$$P(S) = 1/6, P(\bar{S}) = 5/6$$

$$P_S(R) = 3/5, P_{\bar{S}}(R) = 1/5$$

$$1/6 \times 3/5 = 3/30 = 1/10$$

$$5/6 \times 1/5 = 5/30 = 1/6$$

$$P(R) = 1/10 + 1/6 = 3/30 + 5/30 = 8/30 = 4/15$$