

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet d'entraînement n°5

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Thèmes : QCM pluri-thèmes + Fonction exponentielle + Probabilités/variable aléatoire

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point.

Question 1.

Pour tout réel x , l'expression $e^{2x} \times e^{-x}$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
e^{-2x}	e^x	e^{2x^2}	e^{3x}

Question 2.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 5$. Le terme u_{10} est égal à :

A.	B.	C.	D.
47	52	50	17

Question 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x + x^2$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
$3e^x + x$	$3e^{x-1} + 2x$	$e^x + 2x$	$3e^x + 2x$

Question 4.

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,12$. La probabilité conditionnelle $P_A(B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,12	0,4	0,3	0,48

Question 5.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^x > 1$ dans $\mathbb{R}$ est :

A.	B.	C.	D.
$]0 ; +\infty[$	$[1 ; +\infty[$	$] -\infty ; 0[$	$\mathbb{R}$

Question 6.

La valeur exacte de $\cos(7\pi/6)$ est :

A.	B.	C.	D.
----	----	----	----

$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
--------------	--------	-------	---------------

Question 7.

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$P(X = -3) = 0,2$; $P(X = 0) = 0,5$; $P(X = 5) = 0,3$.

L'espérance $E(X)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,5	0,9	1,2	0

Question 8.

u et v sont deux vecteurs tels que $\|u\| = 4$, $\|v\| = 3$ et l'angle entre eux est $\pi/4$. Le produit scalaire $u \cdot v$ est égal à :

A.	B.	C.	D.
12	6	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$

Question 9.

Les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$ sont :

A.	B.	C.	D.
-3 et -4	2 et 6	1 et 12	3 et 4

Question 10.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2 \times 3^n$. Le terme v_4 est égal à :

A.	B.	C.	D.
162	54	108	24

Question 11.

La fonction exponentielle f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est :

A.	B.	C.	D.
décroissante sur $\mathbb{R}$	à la fois croissante et décroissante	strictement croissante sur $\mathbb{R}$	constante

Question 12.

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,5$ et $P(B) = 0,6$. La probabilité $P(A \cup B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
1,1	0,8	0,3	0,2

Exercice 1 — Fonction exponentielle : modélisation médicale (7 pts)

Un patient reçoit une injection unique d'un médicament. La concentration de ce médicament dans le sang, exprimée en milligrammes par litre (mg/L), est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 5 \times e^{-0,4t}$$

où t désigne le temps écoulé depuis l'injection (en heures).

Partie A — Étude de la fonction f

1. Donner la valeur de $f(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que $f'(t) = -2 \times e^{-0,4t}$.
3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.
4. Que peut-on dire de la limite de $f(t)$ lorsque t devient très grand ? Quelle interprétation médicale peut-on en donner ?

Partie B — Application au contexte médical

5. Calculer la concentration du médicament dans le sang du patient au bout de 2 heures. Arrondir le résultat au centième.
6. On dit que le médicament est *efficace* tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 1 mg/L. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée d'efficacité du médicament. Arrondir à l'heure près.
7. Le médecin souhaite déterminer à quel instant la concentration aura été divisée par deux par rapport à la valeur initiale. Résoudre l'équation $f(t) = 2,5$ et donner une valeur approchée au dixième d'heure près.

Indication : pour résoudre une équation de la forme $e^x = k$ (avec $k > 0$), on pourra utiliser la fonction $\ln$ de la calculatrice : $x = \ln(k)$.

Aide au calcul :

$$f(0) = 5 \times e^0 = 5 \times 1 = 5$$

$$f'(t) = 5 \times (-0,4) \times e^{-0,4t} = -2 \times e^{-0,4t}$$

$$f(2) = 5 \times e^{-0,8} \approx 5 \times 0,449 \approx 2,247$$

$$e^{-0,4t} = 1/5 = 0,2 \Rightarrow -0,4t = \ln(0,2) \Rightarrow$$

$$t = \ln(0,2)/(-0,4)$$

$$\ln(0,5) \approx -0,693 ; \ln(0,2) \approx -1,609$$

Exercice 2 — Suites géométriques et variable aléatoire (7 pts)

Partie A — Suite et population

Une espèce protégée de tortues marines compte aujourd'hui 200 individus dans une réserve naturelle. Les biologistes estiment que, grâce au programme de protection, la population augmente de 8 % par an.

On note T_n le nombre de tortues dans la réserve au bout de n années. On a donc $T_0 = 200$.

1. Calculer T_1 et T_2 . Arrondir à l'unité.
2. Justifier que la suite (T_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
3. Exprimer T_n en fonction de n .
4. Combien de tortues comptera-t-on dans la réserve au bout de 10 ans ? Arrondir à l'unité.
5. Les biologistes considèrent que la population est sauvée lorsqu'elle dépasse 500 individus. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années l'espèce sera considérée comme sauvée.

Partie B — Variable aléatoire

Une étude statistique a montré que parmi les œufs pondus par les tortues de la réserve, 70 % donnent naissance à des bébés tortues. On choisit au hasard un œuf parmi ceux pondus cette année et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'œuf donne naissance à une tortue et 0 sinon.

6. Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.
7. Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. On arrondira $\sigma(X)$ au centième.
8. Interpréter la valeur de $E(X)$ dans le contexte de l'exercice.

Aide au calcul :

$$\begin{aligned}T_1 &= 200 \times 1,08 = 216 \\T_2 &= 216 \times 1,08 = 233,28 \approx 233 \\T_{10} &= 200 \times 1,08^{10} \approx 200 \times 2,1589 \\&\approx 432 \\1,08^{12} &\approx 2,5182 ; 1,08^{12} \times 200 \approx \\&503 \\E(X) &= 0,7 ; V(X) = 0,7 \times 0,3 = 0,21 \\&; \sigma(X) \approx 0,458\end{aligned}$$