

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet d'entraînement n°6

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Thèmes : QCM pluri-thèmes + Étude d'une fonction avec exponentielle + Produit scalaire et trigonométrie

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point.

Question 1.

La solution de l'équation $e^x = e^{2x-3}$ est :

A.	B.	C.	D.
$x = -3$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 3$

Question 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
e^{3x}	$3x \cdot e^{3x-1}$	$3 \cdot e^{3x}$	e^3

Question 3.

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_7 = 27$. La raison r de cette suite est :

A.	B.	C.	D.
4	2	6	8

Question 4.

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$. La probabilité $P_A(B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,4	0,3	0,12	0,7

Question 5.

La valeur exacte de $\sin(11\pi/6)$ est :

A.	B.	C.	D.
$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$

Question 6.

Dans un repère orthonormé, $u(3 ; -1)$ et $v(2 ; 4)$ sont deux vecteurs. Le produit scalaire $u \cdot v$ est égal à :

A.	B.	C.	D.
2	10	0	-2

Question 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. L'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0 est :

A.	B.	C.	D.
$y = x$	$y = e^x$	$y = x + 1$	$y = 1$

Question 8.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 5$ et de variance $V(X) = 4$. Soit $Y = 3X + 2$. La variance $V(Y)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
12	36	14	38

Question 9.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$. La somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
100	90	110	95

Question 10.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ atteint son minimum en :

A.	B.	C.	D.
$x = -2$	$x = 2$	$x = -4$	$x = 4$

Question 11.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^x < e^{2x-1}$ dans $\mathbb{R}$ est :

A.	B.	C.	D.
$] -\infty ; 1[$	$] -\infty ; -1[$	$] 1 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$

Question 12.

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,2$, $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,3$. La probabilité $P(B)$ est égale à :

A.	B.	C.	D.
0,5	0,16	0,24	0,4

Exercice 1 — Étude d'une fonction faisant intervenir l'exponentielle (7 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 2) e^x$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A — Étude des variations de f

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x - 1) e^x$.

Indication : on utilisera la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. (On rappelle que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Partie B — Tangente et équation

6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

7. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

8. Démontrer algébriquement que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la donner.

Aide au calcul :

$$f(0) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(1) = -1 \times e \approx -2,718$$

$$f(2) = 0 \times e^2 = 0$$

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2) \times e^x = (1 + x - 2) e^x = (x - 1) e^x$$

$$f(1) = -e \approx -2,72 \text{ (minimum)}$$

Exercice 2 — Produit scalaire, trigonométrie et géométrie (7 pts)

Partie A — Calcul d'angle dans un triangle

Dans un repère orthonormé $(O ; i, j)$ du plan, on donne les points :

- $A(-1 ; 2)$
- $B(3 ; 4)$
- $C(2 ; -1)$

1. Faire une figure soignée représentant les points A, B et C dans le repère.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs AB et AC.
3. Calculer les longueurs AB et AC. Donner les valeurs exactes.
4. Calculer le produit scalaire $AB \cdot AC$.
5. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés (à $0,1^\circ$ près).

Partie B — Trigonométrie

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

6. Calculer $g(0)$, $g(\pi/4)$, $g(\pi/2)$ et $g(\pi)$.
7. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x + 2\pi) = g(x)$. Qu'en déduit-on pour la fonction g ?
8. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\sin(x) = \cos(x)$.

Indication : on pourra utiliser le cercle trigonométrique ou observer que $\sin(x) = \cos(x)$ revient à dire que le point image de x sur le cercle trigonométrique a même abscisse et même ordonnée.

Aide au calcul :

$$AB(4 ; 2), AC(3 ; -3)$$

$$AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AB \cdot AC = 4 \times 3 + 2 \times (-3) = 12 - 6 = 6$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = 6 / (2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}) = 6 / (6\sqrt{10}) = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$$

$$\arccos(\sqrt{10}/10) \approx 71,6^\circ$$

$$g(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$$

$$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x = \pi/4 \text{ ou } x = 5\pi/4$$