

Distance entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et son espérance

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Le bon sens permet de penser qu'en lançant 60 fois un dé non truqué, on obtiendra en moyenne 10 fois le 6.

Cette valeur théorique, qui indique le nombre moyen d'apparitions du 6, correspond à la notion d'espérance. On conçoit qu'en réalisant un échantillon simulé, la moyenne m observée sur cet échantillon n'est pas exactement égale à $\frac{10}{60}$.

Nous allons étudier sur quelques exemples les écarts obtenus entre la moyenne m et l'espérance.

Partie B. Un exemple : tirage de boules

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Un jeu consiste à prendre une boule au hasard dans cette urne et à noter son numéro b . On note X la variable aléatoire définie ainsi :

$X=1$ si $b < 3$;

$X=2$ si $2 < b < 6$;

$X=3$ si $5 < b$.

On voit que $P(X=1) = \frac{3}{10}$; $P(X=2) = \frac{3}{10}$

et $P(X=3) = \frac{4}{10}$.

1. Vérifier que $E(X) = 2,1$.

2. Voici un programme en Python :

```
1 from random import randint
2 L=[]
3 for k in range(10000):
4     b=randint(0,9)
5     if 0<=b<3:
6         L.append(1)
7     if 2<b<6:
8         L.append(2)
9     if 5<b:
10        L.append(3)
11 print(sum(L)/10000)
```

Analyser le programme ci-dessus et expliquer pourquoi il permet d'obtenir la moyenne d'un échantillon. Préciser la taille de cet échantillon.

3. Lancer ce programme plusieurs fois et comparer les résultats obtenus avec la valeur de $E(X)$.

Application 1

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie, on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de *pile* obtenus.

1. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. En déduire la loi de X .

3. Vérifier que $E(X) = \frac{3}{2}$.

4. Écrire un programme Python qui crée un échantillon simulé de taille 10 000 de X et qui renvoie la moyenne m de cet échantillon.

5. Lancer ce programme 10 fois et compléter le tableau ci-dessous.

Que peut-on dire des écarts observés ?

Échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Moyenne m										
Distance $ m - E(X) $										

Application 2

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de *pile* obtenus.

On peut démontrer que $E(X) = 2,5$.

1. Écrire un programme Python qui crée et renvoie la moyenne d'un échantillon de taille 500 puis d'un échantillon de taille 5 000.

2. Que peut-on dire des distances entre les moyennes de ces échantillons et $E(X)$?

Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Nous allons étudier sur des exemples dans quelles proportions une moyenne observée sur un échantillon simulé d'une variable aléatoire peut s'écarter de l'espérance (notée μ).

Partie B. Un exemple

Supposons que l'on jette une pièce de monnaie non truquée et considérons la variable aléatoire X qui associe à PILE le nombre 1 et à FACE le nombre -1 .

1. Vérifier que $E(X) = 0$ et que l'écart-type de X est égal à 1.

2. Effectuons n lancers de la pièce et calculons la moyenne de cet échantillon, c'est-à-dire, en notant x_i les valeurs de X (ici 1 ou -1), $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. On conçoit intuitivement que la moyenne de l'échantillon doit être proche de 0 ; d'autant plus proche que n est grand.

a. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre permet de simuler un échantillon de taille $n = 100$ de X et permet d'obtenir la moyenne d'un tel échantillon.

```
1 from random import randint
2 L=[1 if randint(1,2)==1 else -1 for k in range(100)]
3 print(L)
4 print(sum(L)/100)
```

b. Lancer le programme et comparer la valeur obtenue avec $E(X)$.

3. On se propose à présent de simuler N échantillons de taille $n = 100$. Notons $m_1, m_2, \dots, m_N$ les moyennes de ces échantillons. En théorie des probabilités, on s'intéresse au problème suivant :

(1) « Quelle est la proportion des m_i qui appartiennent à l'intervalle $[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$? »

C'est-à-dire, ici, puisque $\mu = 0$, $\sigma = 1$,

$n = 100$, quelle est la proportion des m_i qui appartiennent à $[-\frac{2}{10} ; \frac{2}{10}]$?

a. Analyser le programme ci-contre et expliquer pourquoi il permet de répondre à cette question.

b. Faire tourner ce programme pour $N = 1\,000$ et vérifier que la proportion obtenue est voisine de 0,95.

```
1 from random import randint
2 def m():
3     L=[1 if randint(1,2)==1 else -1 for k in range(100)]
4     m=sum(L)/100
5     return m
6 N=int(input("nombre d'échantillons ?"))
7 L1=[m() for k in range(N)]
8 L2=[u for u in L1 if -0.2<=u<=0.2]
9 print(len(L2)/N)
```

Application

On choisit une personne au hasard dans la population d'un pays. On estime que la probabilité que cet individu soit atteint d'une maladie M est égale à 0,1. On considère la variable aléatoire X suivante :

$X = 1$ si la personne est atteinte de la maladie M .

$X = 0$ si la personne n'est pas atteinte de la maladie M .

1. Calculer $E(X)$ et σ_X .

2. Écrire un programme Python qui permette de répondre au problème (1) de la question 3 de l'exercice précédent ci-dessus dans le cas $n = 500$ et $N = 1\,000$.

Activité 1 : variable aléatoire

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. a. Préciser l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
 b. Quelle loi de probabilité peut-on choisir sur cet ensemble ?
 c. Quelle est la probabilité de l'événement A : « obtenir un 7, un 8, un 9 ou un 10 » ?
2. On convient que la mise est de 5 € et que le joueur gagne 5 € si la carte tirée est une figure, 10 € si c'est un as et 0 € dans les autres cas.

A chaque issue de l'expérience est donc associé un gain algébrique, positif ou négatif. Appelons X la fonction qui réalise cette association. Nous nommerons variable aléatoire une telle fonction.

- a. Sur quel ensemble est définie la variable aléatoire X ?
- b. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X , c'est à dire l'ensemble des gains possibles ?
- c. On note $X = -5$ l'événement « le gain est -5 € ». Calculer $p(X = -5)$.
- d. Compléter le tableau suivant en calculant, pour chaque valeur x_i prise par X , la probabilité $p(X = x_i)$.

x_i	-5	0	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{4}{32}$

Ce tableau définit une nouvelle loi de probabilité sur le nouvel ensemble E constitué des valeurs x_i prises par X . Cette loi de probabilité est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X .

3. La règle du jeu change. Elle est la même que dans la question précédente mais cette fois la somme est doublée lorsque la carte est un cœur.

Cette règle permet de définir une nouvelle loi de probabilité Y donnant le nouveau gain algébrique du joueur. Déterminer, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

Activité 2 : espérance

Un jeu consiste à lancer un dé à six faces parfaitement équilibré. Si l'on obtient 1, 2, 3, 4 ou 5 on gagne un euro, si on obtient six on perd cinq euros.

1. Dans la feuille de calcul ci-dessous on a simulé 1 000 lancers de dé.

	A	B	C	D
1	Numéro sorti			
2	6			
3	3		fréquence pertes de 5 € :	0,1703
4	3		fréquence gains de 1 € :	0,8297
5	1			
6	6		gain moyen :	-0,0218
7	1			

- a. Quelle formule saisir dans la cellule A2 ?
 Rappel :
 - Une formule de calcul commence par « = » sinon le tableur interprète l'entrée comme un texte à afficher ;
 - ALEA.ENTRE.BORNES(*min*;*max*) renvoie un nombre entier aléatoire compris entre *min* et *max*.
- b. Quelle formule saisir dans D3 ?
 Rappel :
 - A2 fait référence au contenu de la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne A ;
 - NB.SI(*plage*;*critère*) indique le nombre de cases de la plage correspondant au critère.
 Par exemple NB.SI(A2:A6;2) indique le nombre de 2 contenus dans les cases de la plage allant de A2 à A6.
- c. Quelle formule saisir dans la cellule D4 ?
- d. Comment peut-on obtenir le gain moyen à partir des fréquences obtenues en D3 et D4 ? En déduire une formule à entrer en D6.
- e. Modifier les formules écrites précédemment, pour obtenir une simulation avec 10 000 puis 50 000 parties, et préciser vers quelle valeur le gain moyen semble se stabiliser.
2. a. Expliquer les fréquences trouvées en D3 et D4.
 b. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X .
 c. En déduire une façon d'estimer le gain moyen avec les données du problème, sans simulation. Ce gain moyen est appelé **espérance de la variable aléatoire X** .
 d. Le jeu est-il équitable, favorable ou défavorable au joueur ?

1 Définir et exploiter la loi d'une variable aléatoire

Exercice 11. 1 (28 p 318)

Une boîte contient quatre jetons marqués « 1 », « 2 », « 3 », « 4 ». On en tire un jeton au hasard. Si le nombre marqué est pair, on gagne un nombre de points égal au double de ce nombre. Et si le nombre marqué est impair on perd un nombre de points égal au nombre marqué.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points gagnés.

- Quelle est l'issue qui permet de gagner 4 points ?
- Quelle est l'issue qui correspond à l'événement $\{X = -3\}$? Que vaut $P(X = -3)$?
- Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X < 4\}$? Que vaut $P(X < 4)$?

Exercice 11. 2 (34 p 318)

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque élève de 1^{re}, associe le nombre de connexions un jour donné à l'ENT de son lycée. La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

Nombre de connexions k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,15	0,38	0,35	a	0,03

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La valeur de a est 0,09.
- $P(X \leq 2) = 0,88$.
- La probabilité que l'élève se connecte au moins une fois est égale à 0,47.

Exercice 11. 3 (41 p 319)

Un sac contient 26 jetons marqués chacun avec une des 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On gagne 5 € par voyelle tirée et on perd 1 € par consonne tirée.

- Construire un arbre pondéré illustrant cette expérience.
- Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ?
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le gain algébrique du joueur.

Exercice 11. 4 (40 p 319)

Une machine est alimentée en résistances de 1 et 2 ohms. Elle doit souder successivement trois résistances en série : deux résistances de 2 ohms puis une de 1 ohm. Cette machine est déréglée et elle soude trois résistances au hasard.

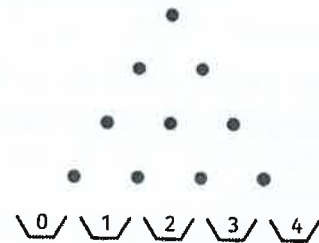
Un résultat est noté sous la forme d'un triplet. Par exemple, le triplet (1,1,2) correspond au cas où les deux premières résistances soudées sont des résistances de 1 ohm et la troisième est une résistance de 2 ohms.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque triplet, associe la somme des valeurs des trois résistances.

Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 5 (Livrescolaire 55 p 325)

La planche de Galton. Un joueur lâche une bille sur une planche inclinée sur laquelle sont plantés des clous comme sur la figure ci-dessous.



À chaque clou rencontré, la bille passe indifféremment à droite ou à gauche. En fin de parcours, elle tombe dans l'une des cases numérotées de 0 à 4. Le numéro de la case est donc le nombre de fois où la bille est descendue à droite lors de son parcours.

- Traduire cette situation par un arbre de probabilité.
- Soit X la variable aléatoire qui au lancer d'une bille associe le numéro de la case dans laquelle elle termine son parcours. Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 6 (Livrescolaire 55 p 325)

On lance un dé icosaédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 20, que l'on suppose bien équilibré.



On marque :

- 2 points si le nombre obtenu est pair ;
- 3 points si le nombre obtenu est premier ;
- 5 points si le nombre obtenu est un multiple de 5 ;
- 7 points si le nombre obtenu est un carré parfait.

Les points sont cumulables.

Soit X la variable aléatoire qui associe au lancer du dé le nombre de points marqués par le joueur.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- En déduire $P(X \leq 5)$, $P(3 \leq X \leq 7)$ et $P(X > 7)$.

2 Espérance et écart type

Exercice 11. 7

On souhaite comparer deux jeux de hasard en étudiant les variables aléatoires X et Y qui associent à chaque jeu le gain correspondant en euros. Les lois de probabilité de X et Y sont les suivantes :

x_i	-2	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	1/4	1/3	1/4	1/12	1/12

y_i	-5	1	2	5	10
$p(Y = y_i)$	1/3	1/6	1/12	1/4	1/6

- Vérifier que les tableaux ci-dessus décrivent bien des lois de probabilité.
- Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
Interpréter l'espérance pour comparer les deux jeux.
- Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
Quelle information supplémentaire peut-on déduire de ces paramètres ?

Exercice 11. 8 (CQFD 57 p 308)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers, de lois données par les tableaux ci-dessous (incomplet pour la loi de Y) :

Valeurs x_j de X	-8	3	4
Probabilités p_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Valeurs y_k de Y	0	2	5	8
Probabilités p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

- Calculer l'espérance de X .
- a. Recopier et compléter le tableau donnant la loi de Y .
b. Calculer $E(Y)$.
- En déduire : a. $E(2X+Y)$ b. $E(X-Y)$

Exercice 11. 9 (Livrescolaire, 86 p 330)

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	-10	0	2	10	100
$P(X=x_i)$	0,4	0,25	0,2	0,1	0,05

On souhaite rédiger un programme avec Python qui permette de calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

- Expliquer ce que calcule le programme suivant.
Quelle est la valeur finale de la variable S calculée ?

```

1 X = [-10, 0, 2, 10, 100]
2 P = [0.4, 0.25, 0.2, 0.1, 0.05]
3 S = 0
4 for i in range(5):
5     S = S + X[i] * P[i]
6 print(S)

```

- Compléter le programme pour qu'il calcule également la variance de X et son écart-type.

Exercice 11. 10 (75 p 330)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -2, 0 et 1, et dont l'espérance mathématique est nulle.

On sait de plus que $P(X=1) = \frac{1}{3}$.

- Déterminer $V(X)$.
- Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 11 (Déclic, 90 p 365)

On donne ci-contre le tableau résumant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

Soit x un réel. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E((X-x)^2)$$

- Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 2(p_1x_1 + p_2x_2)x + (p_1x_1^2 + p_2x_2^2)$$

- a. Justifier que f est un polynôme de degré 2 dont on donnera les coefficients.
b. Montrer que f admet un minimum. En quelle valeur est-il atteint ? Que représente ce minimum pour la variable aléatoire X ?
- Reprendre les questions précédentes pour une variable aléatoire X prenant les valeurs x_i avec une probabilité p_i , pour $1 \leq i \leq n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. 12 (sujet C p 319)

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme ci-dessous.

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Si la fléchette atteint :

- une case rouge, le joueur gagne 8 euros ;
- une case verte, le joueur gagne 5 euros ;
- une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien ;
- une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

- On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

- Donner la loi de probabilité de X .
- Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de a .
- Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $E(X)$ soit nulle.

- Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

- Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?
- Un joueur joue trois parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ?

Exercice 11. 13 (sujet B.p 319)

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée.

Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

- 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
- 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
- 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée.

Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

– 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;

– 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;

– 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

1. Jeanne participe à ce jeu et tire au hasard une question. Déterminer la probabilité que :

a. la question soit dans la catégorie sport et qu'elle donne la bonne réponse ;

b. sa réponse soit bonne à la question posée.

2. Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :

– 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;

– 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;

– 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;

– rien si la réponse qu'elle donne est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne, associe son gain.

On appelle gain la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.

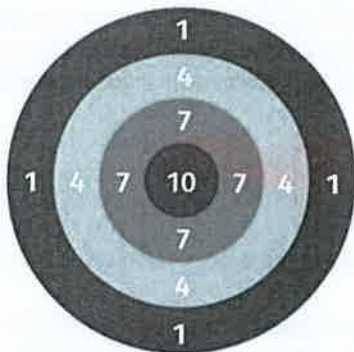
a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de X .

Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

Exercice 11. 14 (68 p 326)

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous.



- La zone rouge est un cercle de rayon 10 cm.
- La zone orange est une couronne dont le grand rayon est 30 cm.
- La zone jaune est une couronne dont le grand rayon est 50 cm.
- La zone bleue est une couronne dont le grand rayon est 70 cm.

La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à sa surface.

On suppose que le participant ne rate jamais la cible.

1. Calculer la surface totale de la cible puis les probabilités d'atteindre les différentes zones ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

a. Donner la loi de probabilité de X .

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 11. 15 (Déclic 80 p 362)

Une roulette de casino comporte 37 cases, numérotées de 0 à 36. On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti. Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.



1. Lorsqu'un joueur mise sur l'un des numéros, on dit qu'il fait un plein. Dans ce cas-là, si le numéro misé sort, il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon il perd sa mise au profit du casino.

Un joueur mise 10 € et fait un plein.

On note X son gain algébrique, en euro.

a. Quel gain le joueur peut-il espérer ?

b. Calculer l'écart type $\sigma(X)$.

2. Lorsqu'un joueur mise sur deux numéros différents, on dit qu'il fait un cheval. Dans ce cas-là, si l'un des numéros choisis sort, il remporte 17 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon, il la perd.

Un joueur mise 10 € et fait un cheval.

On note Y son gain algébrique, en euro.

a. Quel gain le joueur peut-il espérer ?

b. Calculer l'écart type $\sigma(Y)$.

3. Comparer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$, puis les écarts types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter dans le contexte.

Exercice 11. 16 (TS Antilles Guyane, sept 2010)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
 3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit deux animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux deux animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des deux animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,058	0,0015

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
 b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager en moyenne ?

Exercice 11. 17 (74 p 330)

Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 € pour le défaut A et 150 € pour le défaut B. On admet que 90 % des objets produits n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B et 4 % ont les deux défauts A et B.

- On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?
- On admet que tous les objets produits sont vendus.
 - L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 € chaque objet produit ?
 - L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun d'eux.

Exercice 11. 18 (77 p 330)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert.

Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.

Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.

Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :

– si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 € ;

– s'il est blanc, il perd 2 € ;

– s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (où $n \geq 1$).

Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de X_1 .

b. Calculer l'espérance mathématique de X_1 .

2. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

3. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n .

4. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.

5. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale.

Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

Exercice 11. 19 (78 p 331)

Dans une fête foraine, un organisateur dispose de deux sacs de 30 boules chacune. Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

Le sac S_1 contient 27 boules blanches et 3 boules rouges.

Le sac S_2 contient 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante :

Le joueur mise 1 euro et tire une boule dans le sac S_1 qu'il remet ensuite dans ce sac.

– Si la boule tirée est rouge, alors le joueur tire une boule dans le sac S_2 , note sa couleur et le jeu s'arrête.

– Si la boule tirée est blanche, alors le joueur tire une boule dans le sac S_1 , note sa couleur et le jeu s'arrête.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules rouges.

Déterminer $P(X=2)$ et $P(X=1)$.

2. Si les deux boules tirées sont rouges, alors le joueur reçoit 10 euros. Si une seule boule est rouge, il reçoit 2 euros, sinon il perd sa mise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y .

b. Déterminer l'espérance mathématique de Y . Que peut-on en déduire ?

3. Soit n un entier naturel supérieur à 2. Le joueur décide de jouer n parties consécutives indépendantes.

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - a^n$ où l'on déterminera a .

b. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n > 0,9$.



Exercice 11. 20

Une urne contient 5 boules rouges, 4 jaunes et n vertes avec n entier naturel supérieur ou égal à 2. Ces $n+9$

boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. a. Démontrer que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{n^2+41}{(n+9)^2}$.

b. En déduire que la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente est $\frac{18n+40}{(n+9)^2}$.

2. On considère le jeu suivant : le joueur gagne 2 € si les deux boules obtenues sont de même couleur et perd 3 € sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Montrer que l'espérance de X est :

$$E(X) = \frac{2(n^2-27n-19)}{(n+9)^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2(x^2-27x-19)}{(x+9)^2}.$$

a. On admet que $\forall x \in [2; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{10(9x^2+40x-369)}{(x+9)^4}.$$

Dresser le tableau de variations de f .

b. Résoudre dans $[2; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

4. a. Déterminer n pour que $E(X)$ soit minimale.

b. A partir de quelle valeur le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 11. 21 (Déclic, 75 p 361)

La finale d'un tournoi de judo oppose David et Teddy. Plusieurs combats doivent les opposer et le premier qui gagne deux combats remporte le titre. On suppose que la probabilité que Teddy gagne un combat est constante et égale à p .



On note X la variable aléatoire égale au nombre de combats nécessaires pour désigner le vainqueur du tournoi.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. On considère la fonction $\text{tournoi}(p)$ suivante.

```
from random import*
def tournoi(p):
    NbTeddy=0
    NbDavid=0
    NbCombats=0
    while NbTeddy<2 and NbDavid<2:
        NbCombats=NbCombats+1
        if random()<p:
            NbTeddy=NbTeddy+1
        else:
            NbDavid=NbDavid+1
    return NbCombats
```

Justifier que cette fonction simule un tournoi et qu'elle renvoie la valeur prise par X sur cette simulation.

3. On souhaite simuler 1 000 tournois par la fonction $\text{répartition}(p)$ suivante de façon qu'elle renvoie la liste des fréquences observées, dans l'ordre, des événements $\{X=2\}$ et $\{X=3\}$.

```
def répartition(p):
    échantillon=[]
    for i in range(1000):
        échantillon.append(tournoi(p))
    Nb2=échantillon.count(2)
    Nb3=échantillon.count(...)
    return [...,...]
```

a. Sachant que l'instruction $L.append(x)$ insère la valeur x à la liste L , que représente la liste échantillon dans cette fonction ?

b. Compléter la fonction $\text{répartition}(p)$.

c. Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie le nombre moyen de combats sur la simulation.

d. Programmer et estimer l'espérance $E(X)$ lorsque $p=0,5$, puis pour $p=0,8$.

4. a. Construire un arbre pondéré représentant un tournoi et déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p .

En déduire l'expression de $E(X)$ en fonction de p .

b. Justifier que $E(X) = -2p^2 + 2p + 2$.

c. Pour quelle valeur de p l'espérance $E(X)$ est-elle la plus grande possible ?

Interpréter dans le contexte de l'exercice.

d. Vérifier les résultats obtenus en 3. d.

Exercice 11. 22 (Déclic 70 p 360)

D'après un sondage BVA datant de 2018, 76 % des jeunes âgés de 18 à 24 ans pratiquent une activité sportive toutes les semaines. On suppose que cette proportion se maintient ensuite.

1. On choisit au hasard une personne âgée de 18 à 24 ans et on s'intéresse à sa pratique sportive hebdomadaire.

On considère la fonction $\text{simul}(p)$ ci-contre. Justifier que $\text{simul}(0,76)$ permet de simuler l'expérience. Préciser le résultat renvoyé lorsque la personne pratique un sport de façon hebdomadaire.

2. On choisit maintenant au hasard deux personnes âgées de 18 à 24 ans. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant une pratique sportive hebdomadaire parmi les deux choisies.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Expliquer pourquoi la fonction $\text{simul2}(0,76)$ donnée ci-dessous permet de simuler cette expérience.

```
def simul2(p):
    compt=0
    for i in range(2):
        compt=compt+simul(p)
    return compt
```


c. On simule
10 000 fois cette
expérience à l'aide du
programme ci-contre.
On a obtenu l'affichage
suivant :

```
p=0.76
L=[0,0,0]
for i in range(10000):
    j=simul2(p)
    L[j]=L[j]+1
print(L)
```

$L = [556; 3\,695; 5\,749]$
Conjecturer la loi de probabilité de X .
3. En représentant la situation à l'aide d'un arbre pon-
déré, déterminer la loi de probabilité de X .
Comparer avec le résultat de la question 2. c.