

Activité 1 : introduction du nombre dérivé

On lâche une bille sans vitesse initiale d'une haute tour.

On considérera que la distance qu'elle parcourt, depuis son lâcher à l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant t , est $d(t) = 4,9t^2$ où t est en secondes et $d(t)$ en mètres.

On veut évaluer sa vitesse instantanée deux secondes après son lâcher.

Pour cela, on va calculer sa vitesse moyenne sur de petits intervalles de temps à partir de $t_0 = 2$.

1. Calculer la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t = 2,1$.
2. Montrer que la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t = 2 + h$ est :

$$\frac{d(2+h)-d(2)}{h} = 19,6 + 4,9h.$$

3. a. Calculer cette vitesse moyenne pour $h = 0,1$; $h = 0,01$; $h = 0,001$.

b. Quand on donne à h (non nul) des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut (on dit « h tend vers 0 ») les vitesses moyennes entre les instants 2 et $2 + h$ tendent vers une « valeur limite ». Donner cette valeur à 0,1 près.

Ce nombre est appelé **nombre dérivé de d en 2**. On le note $d'(2)$ et on écrit $d'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h}$.

- c. Quelle vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ peut-on proposer ?

Activité 2 : introduire la notion de tangente et de nombre dérivé

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

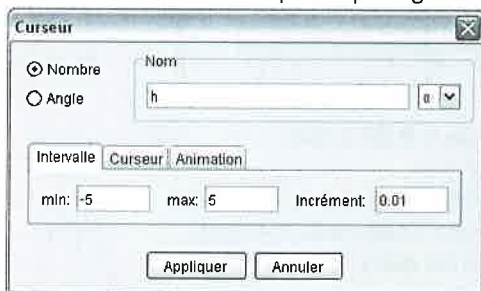
1. Lancer Géogébra.

Faire apparaître le quadrillage (*Affichage, grille*).

2. Définir la fonction f (*barre de saisie, $f(x)=x^2$*).

3. Création d'un point $A(a ; f(a))$:

- a. Définir un curseur a .
- b. Définir le point $A(a ; f(a))$ (*barre de saisie, $A=(a,f(a))$*).
4. Création d'un point $M(a+h ; f(a+h))$ et de la sécante (AM)
- a. Définir un curseur h avec un pas de pilotage de 0,01.



- b. Définir le point $M(a+h ; f(a+h))$.
- c. Construire la sécante (AM) ; droite passant par deux points ; cliquer sur A puis sur M .
- d. Afficher le coefficient directeur de la droite (AM) ; pente.

B. Exploitation de la figure

1. a. Affecter à a la valeur 1.
- b. Cliquer sur le curseur h , déplacer M en faisant varier h à l'aide des touches $\leftarrow$ et $\rightarrow$ du clavier et constater que la sécante (AM) admet une position limite $\mathcal{D}$ quand M est très proche de A .

$\mathcal{D}$ est appelée **tangente à C_f au point d'abscisse 1**. Son coefficient directeur est appelé **nombre dérivé de f en 1** et on le note $f'(1)$.

- c. Que vaut $f'(1)$?

2. a. Toujours dans le cas où $a = 1$, exprimer le coefficient directeur de la sécante (AM) en fonction de h .

- b. Comment doit-on choisir h pour que M soit très proche de A ?

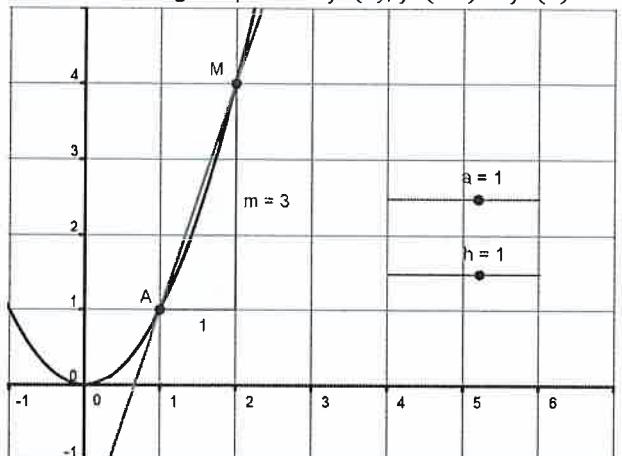
- c. Proposer une définition de $f'(1)$.

3. En déplaçant le point A sur la courbe C_f déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$.

4. a. Dans le cas où a est un réel quelconque, exprimer le coefficient directeur de la sécante (AM) en fonction de a et h .

- b. En utilisant la question 2. c et la question précédente, exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

- c. Retrouver algébriquement $f'(1)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.



1 Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

Exercice 4. 1 (29 p 120)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.
2. Calculer la pente de la sécante à la courbe de f passant par les points d'abscisses 0 et 2.

Exercice 4. 2 (CQFD 6 p 138)

1. Écrire une fonction Python `carre(x)` qui renvoie l'image de x par la fonction carré.
2. Saisir l'instruction suivante dans la console, puis expliquer son rôle.

```
entiers = [i for i in range(-3,8)]
```

3. On souhaite calculer les coefficients directeurs de dix sécantes à la courbe de la fonction carré issues du point $A(2;4)$, pour un pas égal à 1. Pour ce faire, écrire une fonction Python utilisant certains des éléments de la liste `entiers`.

Exercice 4. 3 (39 p 120)

Pour chaque fonction suivante dont on donne une expression, déterminer, en utilisant la définition, le nombre dérivé en 3.

- a. $f(x) = x$ b. $g(x) = x^2$ c. $h(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 4. 4

Dans chaque cas montrer que f est dérivable en a , calculer $f'(a)$ et interpréter graphiquement le résultat.

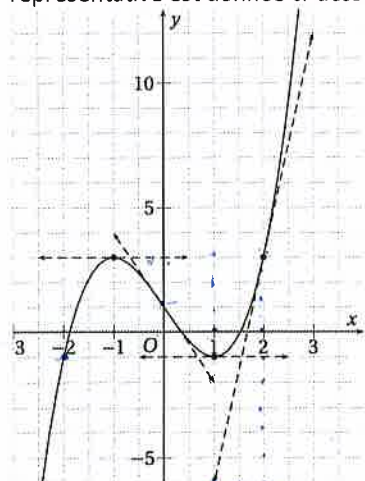
- a. $f(x) = x^2 + 3x + 7$; $a = 0$ c. $f(x) = x^3$; $a = 2$
 b. $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$; $a = -2$ d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $a = -1$

Exercice 4. 5 (84 p 123)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2|x - 2|$. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 4. 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



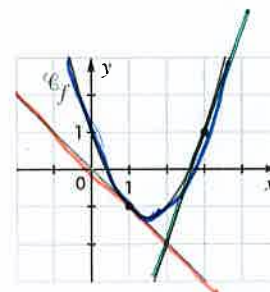
1. Déterminer graphiquement :
 - a. $f(0)$ et $f'(0)$;
 - b. $f(-1)$ et $f'(-1)$;
 - c. $f(2)$ et $f'(2)$;
- d. L'équation réduite de la tangente T_{-1} au point

d'abscisse -1 .

- e. L'équation réduite de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point $A(1; 26)$.
 - a. Déterminer par le calcul une équation de T .
 - b. En déduire $f'(2)$.

Exercice 4. 7 (34 p 120)

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 3.

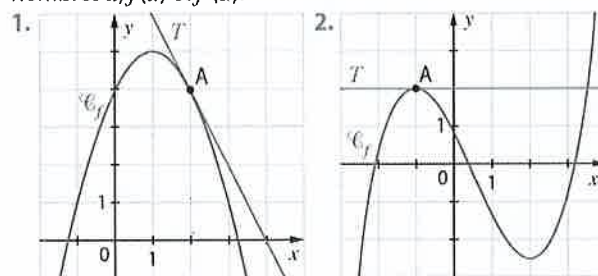


1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.
2. Déterminer graphiquement $f'(3)$.

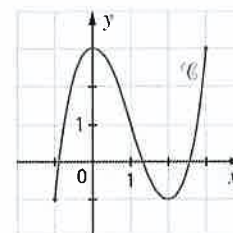
Exercice 4. 8 (35 p 120)

Sur chacun des deux graphiques suivants sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable en a et sa tangente T au point d'abscisse a .

Dans chacun des cas, déterminer par lecture graphique les nombres a , $f(a)$ et $f'(a)$.

**Exercice 4. 9** (37 p 120)

Soit g une fonction définie sur $[-1; 3]$ et dont la courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre. On admet que $g'(1) = -3$ et que $g'(2) = 0$. Reproduire $\mathcal{C}$ puis tracer deux tangentes à l'aide des deux informations données.

**Exercice 4. 10**

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

1. Dans un repère orthogonal d'unité 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, placer les points de la courbe représentative de la fonction v d'abscisse -1 , $-\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$ et 2 .
2. Déterminer à l'aide d'une calculatrice les valeurs de $v'(-1)$, $v'(0)$, $v'(1)$ et $v'(2)$.
3. Tracer les tangentes à la courbe aux points d'abscisse -1 , 0 , 1 et 2 .
4. Tracer la courbe représentative de la fonction v sur $[-1; 2]$.

Exercice 4. 11 (12 p 118)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction g dérivable en 4 telle que $g(4) = 3$ et $g'(4) = 1$.
Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

1. Le coefficient directeur de T est-il égal à 4, à 3 ou à 1 ? Justifier.
2. Quelles sont les coordonnées du point de contact de T et de $\mathcal{C}$?

Exercice 4. 12

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

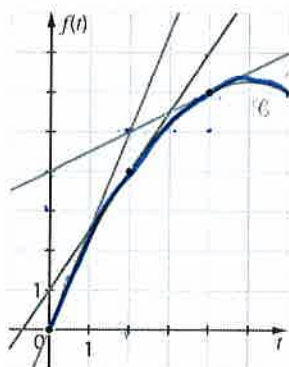
- a. Calculer $g'(2)$.
- b. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 4. 13 (91 p 124)

La position d'une bille sur sa trajectoire rectiligne est donnée par son abscisse $f(t)$ (en mètres), en fonction du temps t (en secondes).

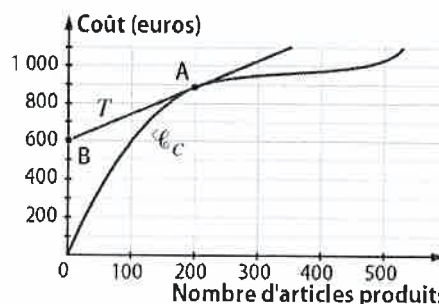
On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0, 2 et 4.

1. Déterminer $f'(0)$ par lecture graphique et interpréter le résultat.
2. Déterminer la vitesse de la bille aux instants :
a. $t = 2$ b. $t = 4$

**Exercice 4. 14** (95 p 125)

L'entreprise Sportymax fabrique des articles de sport.

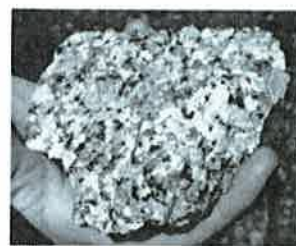
Le coût total de fabrication de ces articles (en euros) est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative $\mathcal{C}_C$ est donnée ci-dessous. La tangente T à cette courbe au point $A(200; 880)$ passe par le point $B(0; 600)$.



1. On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 200^e article. Une valeur approchée de ce coût est le nombre dérivé de la fonction C en 200. Déterminer une valeur approchée de ce coût au rang 200.
2. Expliquer la démarche à réaliser graphiquement afin de déterminer le coût marginal le plus faible.

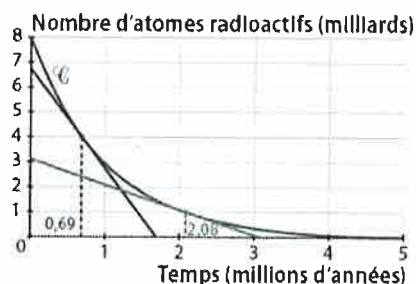
Exercice 4. 15 (96 p 125)

Pour dater certaines roches, on utilise la loi de décroissance radioactive sur des atomes comme le carbone 14.



On modélise le nombre d'atomes radioactifs, exprimé en milliards, en fonction du temps, exprimé en millions d'années, par une fonction N .

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et ses tangentes aux points d'abscisses 0,69 et 2,08 sont tracées ci-dessous.



1. Par lecture graphique, déterminer la vitesse de désintégration du nombre d'atomes :
a. au bout de 690 000 ans ; b. au bout de 2 080 000 ans.
2. Conjecturer le lien entre le nombre d'atomes radioactifs et la vitesse de désintégration de ces atomes.
3. La vitesse de décroissance augmente-t-elle au cours du temps ou diminue-t-elle ? Expliquer.

2 Déterminer la dérivée d'une fonction usuelle**Exercice 4. 16**

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- a. $f(x) = -2x + 5$; h. $f(x) = \frac{4}{x}$;
- b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; i. $f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{x}$;
- c. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2$; j. $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{3x}{2}$;
- d. $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$; k. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x^3 - 1$;

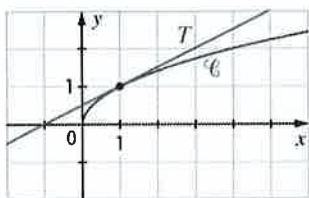
- e. $f(x) = x^2\sqrt{2} - x\sqrt{5}$; l. $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x}$;
- f. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6}$; m. $f(x) = x^2 - \frac{3\sqrt{x}}{4}$;
- g. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x$; n. $f(x) = \frac{5+\sqrt{x}}{2}$.

Exercice 4. 17 (44 p 121)

On considère ci-dessous

la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

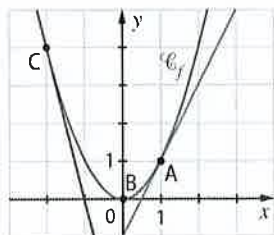
et sa tangente au point d'abscisse 1.



1. a. Déterminer $f'(1)$ par lecture graphique.
- b. Retrouver ce résultat par un calcul.
2. Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer sa tangente au point d'abscisse 4.
3. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 5$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.
4. Expliquer pourquoi aucune tangente de $\mathcal{C}$ n'a une pente négative.

Exercice 4. 18 (42 p 121)

On a tracé ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et ses tangentes en trois points A, B et C.



- a. Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.
- b. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
- c. Vérifier par calculs les résultats de la question a..

Exercice 4. 19 (45 p 121)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 2.
2. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}$, distinct de A, en lequel la tangente est parallèle à T .
3. Soit a un réel non nul. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives $-a$ et a sont parallèles.

Exercice 4. 20 (48 p 121)

Soit i la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = \frac{1}{x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 4. 21 (71 p 122)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x.$$

1. Déterminer l'expression de f' .
2. En déduire que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

Exercice 4. 22 (72 p 122)

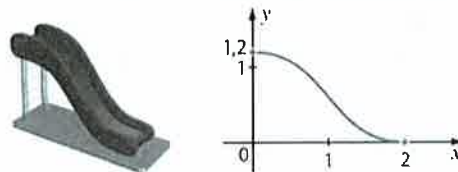
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$ et $g(x) = -2x^2 + 2x - 3$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente Δ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 1 sont parallèles.
2. Les tangentes T et Δ sont-elles confondues ?

Exercice 4. 23 (116 p 134)

On souhaite modéliser le profil d'un toboggan, de hauteur 1,20 mètre et de longueur 2 mètres, par la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



On se propose de déterminer les réels a , b , c et d tels que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A (0 ; 1,2) et B (2 ; 0) ;
- en ces deux points A et B, la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

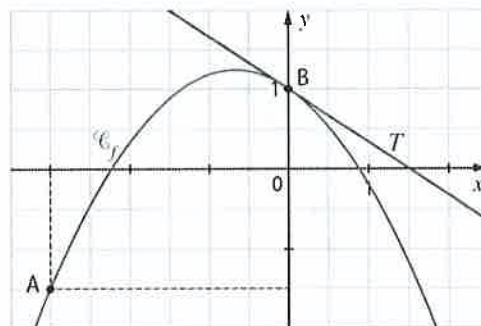
1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
2. a. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
- b. En déduire les valeurs de c et d .
3. a. Indiquer les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.
- b. Montrer que les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 8a + 4b + 1,2 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$
- c. Calculer les réels a et b puis donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 4. 24 (73 p 122)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels.

On a tracé sa courbe ci-dessous, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.



À partir de ces informations, déterminer l'expression de f .

Exercice 4. 25 (88 p 123)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.

1. Écrire une équation de la droite T .
2. Vérifier que, pour tout réel x , $x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$.
3. a. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
- b. Vérifier à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 4. 26 (92 p 124)

Pour tester la sécurité des voitures, de nombreux essais sont effectués comme le lancement en ligne droite et à vive allure d'une voiture qui percute un mur. Durant ce test, on note $x(t)$ la distance en mètres parcourue par le véhicule t secondes après son départ. La voiture percute le mur au bout de 4 secondes.

On admet que pour tout $t \in [0; 4]$, $x(t) = t^3 + 0,45t^2$.
 x est donc une fonction de la variable t .

1. Déterminer l'expression de la dérivée de x .

On pourra la noter comme en physique $\frac{dx}{dt}$.

2. En déduire la vitesse instantanée en $m \cdot s^{-1}$, puis en $km \cdot h^{-1}$, de la voiture au démarrage, puis lors de l'impact. On arrondira si besoin à l'unité.

Exercice 4. 27 (93 p 125)

Une entreprise fabrique de la peinture. Le coût de fabrication, exprimé en euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur $[1; 100]$ par :

$$C(x) = 0,001x^3 - 1,2x^2 + 600x + 500.$$

1. a. Quel est le coût de production exact de 50 tonnes de peinture ? de 51 tonnes ?

b. En déduire l'augmentation du coût entraînée par la fabrication de la 51^e tonne de peinture.

2. On appelle coût marginal au rang x la différence $C(x) - C(x-1)$. On note $d(x)$ cette différence.

a. Quel est le coût marginal au rang 50 ?

3. On note C' la dérivée de la fonction C .

a. Calculer $C'(x)$, puis $C'(50)$.

b. Calculer $d(50)$ et comparer à $C'(50)$.

c. Que constate-t-on ?

3 Déterminer la dérivée d'une fonction

Exercice 4. 28

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$

b. $f(x) = (5\sqrt{x} - 4) \times \frac{1}{x}$

c. $f(x) = (x^2 - 3)(4x - 5)$

d. $f(x) = 3(10x^2 - 1)(5x^2 - x + 4)$

e. $f(x) = \left(-\frac{2}{x} + 1\right)(x^2 + 3)$

f. $f(x) = (-x + 3)(1 - \sqrt{x})$

g. $f(x) = (3x^2 + 4x - 1)(2x^4 - 6x^3 + 2x - 1)$

h. $f(x) = 4(2x^2 - 5x + 1)(x^5 - 8x^4 + x - 3)$

Exercice 4. 29

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

d. $f(x) = -\frac{5}{x^2-1}$

b. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4\sqrt{x}}$

e. $f(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{x^4}$

c. $f(x) = -\frac{4}{x^2+3}$

f. $f(x) = \frac{2}{x^3+x-1}$

Exercice 4. 30

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = \frac{-x+2}{2x+5}$

d. $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^2-4}$

b. $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-5x+4}$

e. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$

c. $f(x) = \frac{2x-x^2}{x-2}$

f. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

Exercice 4. 31

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = (-3x+4)^3$

d. $f(x) = (2x+1)^4$

b. $f(x) = \sqrt{2x-10}$

e. $f(x) = \sqrt{6-2x}$

c. $f(x) = \frac{3}{2(x+2)^4}$

f. $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x}$

Exercice 4. 32 (89 p 123)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-2}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Vérifier que, pour tout x de I , $f(x) = 2 + \frac{8}{x-2}$.

b. Calculer $f'(x)$ en utilisant cette expression.

Vérifier la cohérence avec la réponse apportée à la question 1..

3. a. Calculer le nombre dérivé de f en 3.

b. Montrer que la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite $y = -8x + 34$.

4. a. Montrer que, pour tout réel x de $]2; +\infty[$,

$$f(x) - (-8x + 34) = \frac{8(x^2 - 6x + 9)}{x-2}.$$

b. En déduire la position relative de T et $\mathcal{C}$ sur I .

Exercice 4. 33

**

Définition :

Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle I .

Dire que ϕ est deux fois dérivable sur I veut dire que ϕ est dérivable sur I et que sa dérivée ϕ' est dérivable sur I .

Dans ce cas on note ϕ'' ou $\phi^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de ϕ .

Plus généralement, sous réserve d'existence, si $n \in \mathbb{N}^*$, dire que ϕ est n fois dérivable sur I signifie que $\forall k \leq n-1$, $\phi^{(k)}$ est dérivable (avec $\phi^{(0)} = \phi$).

Dans ce cas on note $\phi^{(n)} = (\phi^{(n-1)})'$.

Soit $f : x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$. On suppose que

f est n fois dérivable sur $\mathcal{D}$, quelque soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer l'expression de la dérivée n -ième de f . On admet que cette conjecture est vraie.

3. Trouver tous les réels x tels que $f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 4. 34

**

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^*$, la dérivée logarithmique de u est la

$$\text{fonction } L(u) = \frac{u'}{u}.$$

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , à valeur dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et de v .

2. Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Calculer la $L(P)$.

Exercice 4. 35

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire. Que dire de f' ? *

Même question si f est paire, si f est périodique, de période T .

Exercice 4. 36

*

Soient a un réel non nul et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2$.

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe d'abscisses x_1 et x_2 .

5 Dérivation : application à l'étude de fonctions

1 Fonction dérivée et variations

Propriété 5.1

variations et signe de la dérivée

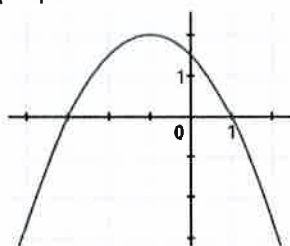
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \leq 0$.

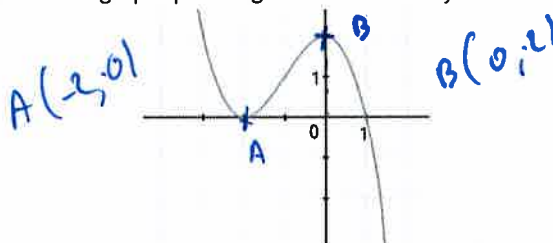
Dans chacun de ces deux cas, si de plus f' s'annule qu'un nombre fini de fois alors f est strictement monotone.

- f est constante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) = 0$.

1. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dédurre de cette représentation graphique le sens de variation de la fonction f .



2. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dédurre de cette représentation graphique le signe de la fonction f' .



Exemple 5.1

3. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 9x^2 + 15x - 1$.
Etudier les variations de f .
4. Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et dont la dérivée est donnée par $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.
- Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.
 - Calculer $G(0)$ et en déduire que F est une fonction impaire.

2 Extremums d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Définition 5.1

maximum, minimum, extremum, extremum local

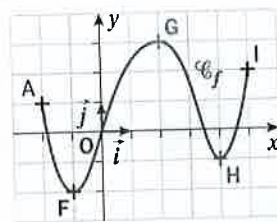
- Le réel M est le maximum de f sur I si il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq M$.
On dit alors que le maximum M de f sur I est atteint en a .
- Le réel m est le minimum de f sur I si il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = m$ et si pour tout réel $x \in I$, $m \leq f(x)$.
On dit alors que le minimum m de f sur I est atteint en a .
- On appelle extremum de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I .
- On dit que le réel α est un extremum local de f sur I si il existe un intervalle ouvert $J \subseteq I$ tel que α soit un extremum de f sur J .

Remarque : si f est définie sur un intervalle $[a; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas, par définition, des extremums locaux.

Exemple 5.2

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur un intervalle $I = [-2; 5]$.

1. Quel est le maximum de f sur I , en quelle valeur est-il atteint ?
2. Quel est le minimum de f sur I , en quelle valeur est-il atteint ?
3. f admet-elle des extremums locaux sur I ?



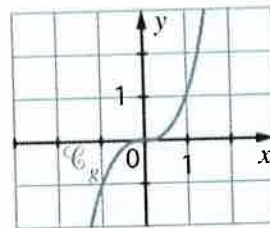
Propriété 5.2

caractérisation d'un extremum local

Soit α un réel de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I .

- Si f admet un extremum local en α alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si $f'(\alpha) = 0$ et f' change de signe en α alors f admet un extremum local en α .

Remarque La réciproque du premier point est fausse. Par exemple la dérivée de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ s'annule en 0 et mais g n'a pas d'extremum local.



Exemple 5.3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-2; 4]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.
Etudier les variations de f et en déduire les extremums de f sur I .

Démonstration 1 : Caractérisation d'un extremum local

Résultat admis

Si g est une fonction définie sur un intervalle J , ne changeant pas de signe sur J et telle que $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est du même signe que celui de g sur J .

Soit f une fonction dérivable et non constante sur un intervalle $]a; b[$ et $c \in]a; b[$.

1. Montrer que si $f'(c)=0$, $f'(x) \geq 0$ sur $]a; c]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $]c; b[$, alors $f(c)$ est un extremum local de f .

On démontre de même que si $f'(c)=0$, $f'(x) \leq 0$ sur $]a; c]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $]c; b[$, alors $f(c)$ est un extremum local de f .

2. On suppose dans cette question que $f(c)$ est le seul extremum local de f sur $]a; b[$ et que c'est un maximum.

a. Soit $h \neq 0$ tel que $c+h \in]a; b[$.

Préciser, en justifiant, le signe du taux d'accroissement

$$\tau_c(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

On distinguera les cas $h > 0$ et $h < 0$.

b. En déduire que $f'(c)=0$.

c. Supposons que f' ne change pas de signe en c et considérons s et t dans $]a; b[$ tels que $s < t$ et $c \in [s; t]$

En distinguant les cas $f'(x) \geq 0$ sur $[s; t]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[s; t]$, montrer que cela contredit l'hypothèse « $f(c)$ est le seul maximum local de f sur $]a; b[$ », puis conclure

On démontre de même que si $f(c)$ est un minimum de sur $]a; b[$, alors $f'(c)=0$ et f' change de signe en c .

Démonstration 2 : Caractérisation des fonctions constantes

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que $f'(x)=0$ pour tout $x \in I$. Justifier le fait que f est à la fois croissante et décroissante sur I .

En déduire que, pour tous nombres a et b de I , on a $f(a)=f(b)$.

2. Que reste-t-il à montrer pour prouver cette caractérisation des fonctions constantes ?

Activité 1 : trouver un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [-3 ; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

1. a. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f .

b. Par lecture graphique dresser le tableau de variations de f sur I .

2. Semble-t-il possible d'obtenir un nombre dérivé $f'(a)$ négatif lorsque $a \in [-3 ; -1]$?

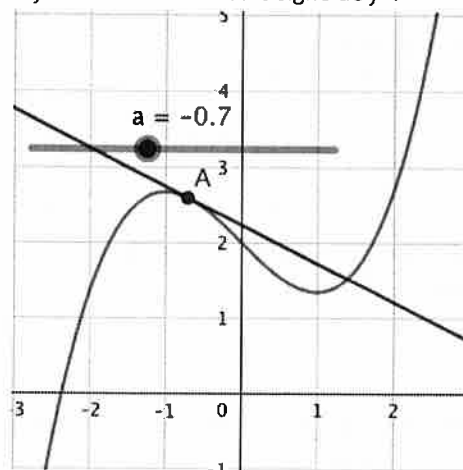
3. a. A l'aide du logiciel, créer un curseur a (compris entre -3 et 3) avec un pas de $0,1$.

Définir le point $A(a ; f(a))$.

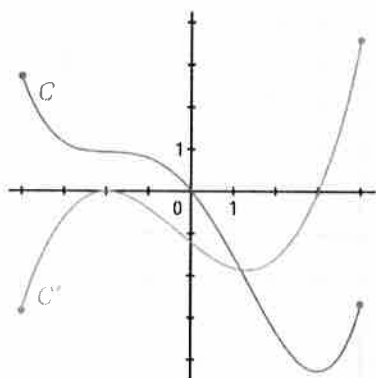
Tracer la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ en A et afficher son équation réduite dans la fenêtre.

b. A partir de cette équation lire le nombre dérivé $f'(a)$ pour différentes valeurs de a (faire varier le curseur).

4. Conjecturer un lien entre le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I et le signe de f' .

**Activité 2 :** trouver un lien entre les extremums d'une fonction et les valeurs de sa dérivée

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ ainsi que la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de la fonction h' , fonction dérivée de h .



1. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction h' s'annule-t-elle ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction h' s'annule-t-elle en changeant de signe ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une (des) tangente(s) parallèle(s) à l'axe (Ox) ?

4. Pour quelle valeur de x la fonction h change-t-elle de sens de variation ?

5. Pour quelle valeur de x la fonction h atteint-elle son minimum ?

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} \text{ ainsi que sa fonction dérivée définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2.$$

a. Représenter la courbe de ces deux fonctions à la calculatrice.

b. Répondre aux questions 1 à 5 avec les fonctions f et f' .

Etudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Exercice 5. 1 (18 p 146)

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $[-10; 10]$.

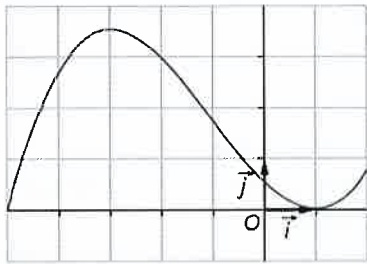
x	-10	0	5	10
$f(x)$	-5	-1	-3	4

Quel est le signe de la dérivée de la fonction f sur :

- a. $[-10; 0]$ b. $[0; 5]$ c. $[5; 10]$

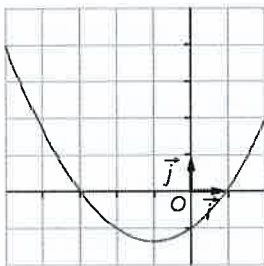
Exercice 5. 2

Soit f la fonction définie sur $[-5; 2]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

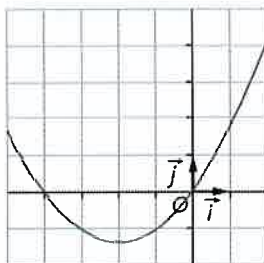


Associer à cette fonction la représentation graphique de sa fonction dérivée.

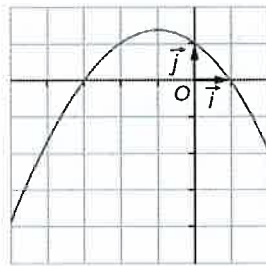
a.



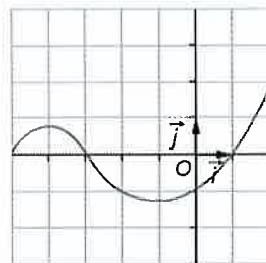
c.



b.

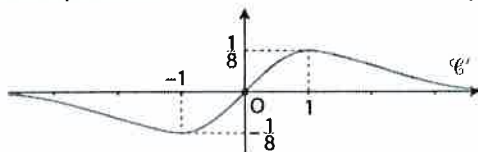


d.

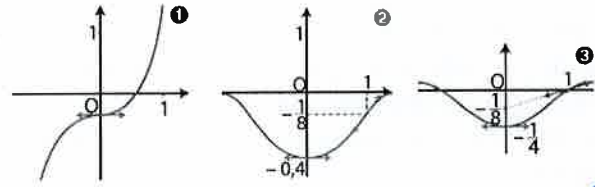


Exercice 5. 3

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C' de sa fonction dérivée f' .



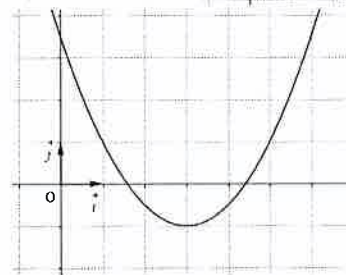
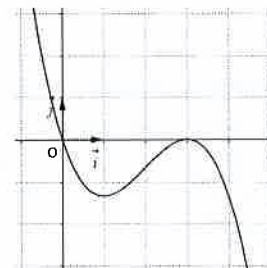
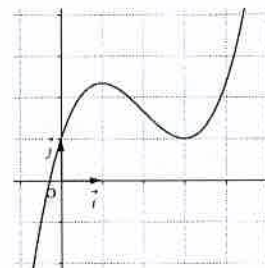
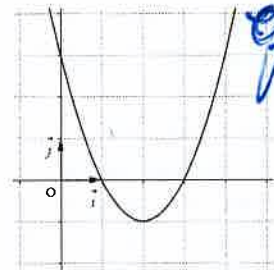
- a. Par lecture graphique déterminer le sens de variation de f .
 b. Parmi les courbes suivantes laquelle pourrait être celle de f ?



Exercice 5. 4

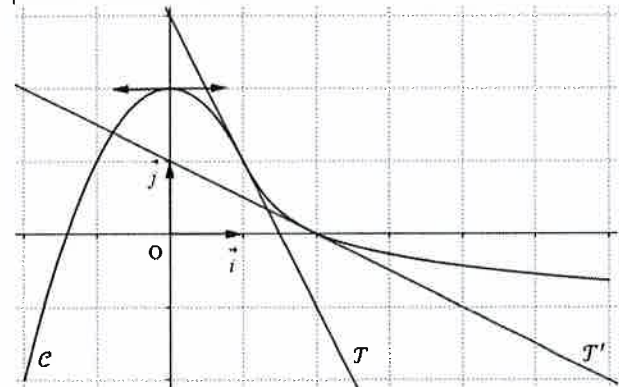
On a représenté ci-contre la fonction dérivée d'une fonction f .

Laquelle des trois courbes tracées ci-dessous est celle de f ?



Exercice 5. 5

Soit $I = [-2; 6]$. Sur le graphique ci-dessus, la courbe C représente une fonction f dérivable sur I . Les droites T et T' sont les tangentes à la courbe, respectivement aux points d'abscisse 1 et 2.



1. Reproduire et compléter, à l'aide de lectures graphiques, le tableau suivant.

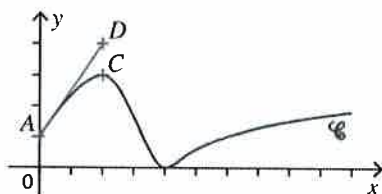
x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0
$f'(x)$	0	-2	-1/2

2. Résoudre graphiquement dans I les équations et inéquations :

- a. $f(x) = 1$; b. $f(x) < 1$;
c. $f'(x) = 0$; d. $f'(x) < 0$.

Exercice 5. 6 (Barbazo 75 p 168)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ dont on donne la représentation graphique.



Les coordonnées des points indiqués sont $A(0 ; 1)$, $D(2 ; 4)$ et $C(2 ; 3)$.

La droite (AD) est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La courbe rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

On sait aussi que $f(6) = 1$ et que la tangente au point d'abscisse 6 passe par le point $E(3 ; 0)$.

1. Par lecture graphique :

- a. déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(6)$;
b. déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6 ;
c. dresser le tableau de signes de f' .

2. On considère la fonction g définie par $g = \frac{1}{f}$.

- a. Déterminer le domaine de définition de g .
b. Donner l'expression de g' à l'aide de f et de f' .
c. En déduire le sens de variation de g .

Exercice 5. 7 (47 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2$ où $I = \mathbb{R}$
b. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 2$ où $I = \mathbb{R}$

Exercice 5. 8 (48 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ où $I =]0 ; +\infty[$
b. $f(x) = 3 - \frac{5}{x}$ où $I =]0 ; +\infty[$

Exercice 5. 9 (49 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$ où $I =]2 ; +\infty[$
b. $f(x) = \frac{4x-7}{2x-2}$ où $I =]1 ; +\infty[$

Exercice 5. 10 (50 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ où $I = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ où $I = \mathbb{R}$

Exercice 5. 11 (51 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 3}$ où $I = \mathbb{R}$
b. $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + x}$ où $I = \mathbb{R} \setminus \{-0,5 ; 0\}$

Exercice 5. 12 (56 p 150)

Un médicament antalgique est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heures, associe la concentration $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L). La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

- a. Calculer $f'(x)$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 6]$.
c. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; 6]$ et construire son tableau de variation.
d. L'affirmation « Au bout de 3 heures, il y a davantage de produit actif dans le sang qu'au bout de 2 heures. » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 5. 13 (54 p 149)

Les nombres a, b, c et d sont des réels donnés, et c est non nul.

La fonction f est définie sur l'intervalle $I =]-\frac{d}{c} ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

- a. Montrer que, pour tout réel x de I , on a $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
b. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour que la fonction `var` retourne le booléen `True` si f est croissante sur I et le booléen `False` si f est décroissante sur I .

```
1 def var(a,b,c,d):
2     V=...
3     return(...)
```

Exercice 5. 14

m est un réel et f la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{x - m}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier, selon les valeurs du réel m , les variations de la fonction f .

Exercice 5. 15 (Barbazo 62 p 166)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1,$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g .

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$.

b. Étudier le signe de $h(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.

4. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner une équation de cette tangente.

Exercice 5. 16 (livrescolaire 100 p 154)

Partie A :

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

2. Calculer $g(1)$ puis conjecturer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2}{x^2 + 1}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Peut-on trouver des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -2x$? Si oui, préciser leurs abscisses respectives.

Exercice 5. 17

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 7X + 10$.

2. En déduire une factorisation du polynôme :

$$p(x) = x^4 - 7x^2 + 10.$$

3. Déterminer le signe de $p(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la parité de f et expliquer pourquoi on peut restreindre son étude à $[0; +\infty[$.

3. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.

c. Donner les variations de f sur $[0; +\infty[$.

4. a. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point 1.

b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

c. Déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à T .

quel dir déjà connu

Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

Exercice 5. 18 (65 p 150)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 4]$

par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.
2. Déterminer les extremums (éventuellement locaux) de f sur $[-1; 4]$.
3. Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 3 ?

Exercice 5. 19 (67 p 150)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 2}$.

1. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5; 1]$.
2. Quel est le minimum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
3. Quel est le maximum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 5. 20 (70 p 151)

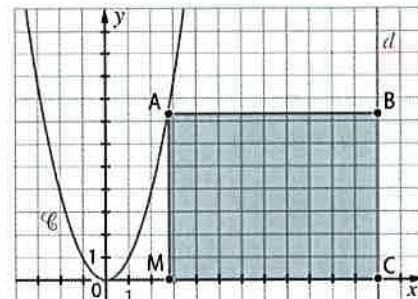
Le nombre n est un entier supérieur ou égal à 1. On considère

n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$.

Montrer que f admet un minimum et préciser en quelle valeur il est atteint.

Exercice 5. 21 (82 p 152)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation $x = 12$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x; 0)$ avec x réel compris entre 0 et 12, on construit le rectangle ABCM comme sur la figure ci-dessous.

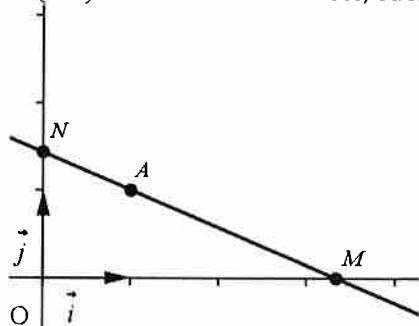


1. Déterminer, en fonction de x , les coordonnées des points A, B et C.
2. Montrer que l'aire du rectangle MABC est égale à $-x^3 + 12x^2$.
3. On considère la fonction f définie sur $[0; 12]$ par : $f(x) = -x^3 + 12x^2$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.
 - b. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer la position du point M rendant l'aire du rectangle MABC maximale et préciser cette aire.

Exercice 5. 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

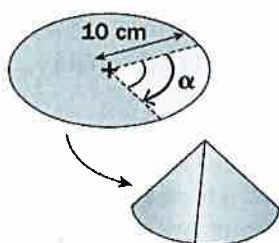
1. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$.
- b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. A tout réel $m > 1$ on associe le point M de coordonnées $(m; 0)$ et on note N le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées, où $A(1; 1)$.



- a. Démontrer que N a pour coordonnées $(0; \frac{m}{m-1})$.
- b. Montrer que l'aire du triangle OMN est égale à $f(m)$.
- c. Quelle est la position du point M pour laquelle l'aire du triangle OMN est minimale ?

Exercice 5. 23 (Hatier 71 p 155)

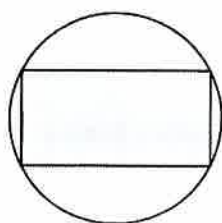
À partir d'un disque en carton souple de rayon 10 cm que l'on découpe sur un rayon et en faisant chevaucher le carton sur un angle α donné, on fabrique un chapeau de forme conique comme sur la figure ci-contre.



- **Calculer** | Parmi tous les chapeaux possibles construits selon cette méthode, quel est celui de volume maximal ? Quelle est sa hauteur ?

Exercice 5. 24 (Barbazo 79 p 169) Ca1, 2

On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1.



- Déterminer les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale.

Exercice 5. 25 (Barbazo 80 p 169)

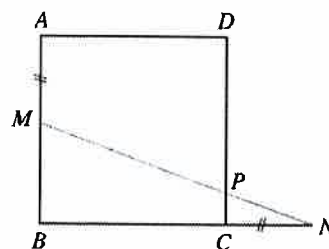
$ABCD$ est un carré de côté 1.

M est sur le segment $[AB]$.

On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC]$ à l'extérieur du segment $[BC]$.

La droite (MN) coupe (DC) en P .

On pose $AM = x$ avec $0 \leq x \leq 1$.



Le but de l'exercice est de trouver M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.

1. Exprimer BM et BN en fonction de x .

2. Montrer que $PC = \frac{-x^2 + x}{x + 1}$.

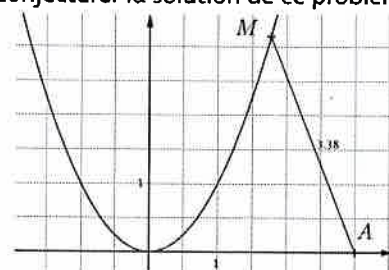
3. En déduire la position du point M maximisant la longueur PC .

Exercice 5. 26 (Déclic 94 p 126)

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. On note A le point de coordonnées $(3; 0)$ et M un point mobile sur $\mathcal{P}$ d'abscisse $x \geq 0$.

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M sur $\mathcal{P}$ telle que la longueur AM soit minimale.

1. Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer la solution de ce problème.



2. Justifier que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale.

3. On note d la fonction qui à tout réel x positif associe AM^2 .

- a. Montrer que $d(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.

- b. Montrer que la dérivée de la fonction d vérifie :

$$d'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 6)$$

- c. Étudier les variations de la fonction d sur $[0; +\infty[$

4. Conclure.

Exercice 5. 27 (84 p 152)

Une entreprise vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large. On note x sa longueur exprimée en kilomètres, x étant un réel compris entre 0 et 10.



Le coût total de production en euros de ce tissu est donné, en fonction de x , par $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000$. Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de

tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. a. Déterminer le montant des coûts fixes.
- b. Calculer le coût de production, la recette et le bénéfice générés par la production et la vente de 4 kilomètres de tissus.
- c. Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
2. a. Montrer que, pour tout réel de $[0; 10]$:

$$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000.$$
- b. Déterminer $B'(x)$.
- c. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
3. a. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?
- b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 5. 28 (TP2 p 159)

Une entreprise fabrique une pâte à cookies dont le coût total journalier de production (exprimé en centaines d'euros) pour x litres de pâte est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $I = [1; 50]$ par $C(x) = 0,75x^2 + 3x + 315$.

A Quelques calculs de coûts

- a. Calculer le coût fixe journalier de l'entreprise.
- b. Calculer le coût total de production de 20 litres de pâte à cookies.

B Coût moyen

1. Exprimer le coût moyen de production d'un litre de pâte $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$, avec x dans $[1; 50]$.
2. Calculer le coût moyen de production d'un litre quand on produit 20 litres.
3. a. Représenter la fonction C_M à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.
- b. Conjecturer graphiquement la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.
4. a. Déterminer la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.
- b. Déterminer ce coût moyen minimum.

C Coût marginal

1. Le coût marginal est le supplément de coût engendré pour produire un litre supplémentaire de pâte.
 - a. Exprimer le coût marginal $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$ en fonction de x .
 - b. Déterminer le coût marginal pour une production de 20 litres de pâte à cookies.
2. Les économistes prennent souvent comme valeur approchée de $C_m(x)$ la valeur $C'(x)$.
 Déterminer $C'(x)$ et justifier cette approximation.

D Une égalité de coûts

- a. Représenter sur un même graphique les courbes repré-

sentatives des fonctions C' , C_m et C_M avec un logiciel ou une calculatrice.

- b. Résoudre graphiquement l'équation $C_M(x) = C_m(x)$.
 Quel résultat de la partie B retrouve-t-on ?
- c. Résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$.

Exercice 5. 29

1. Soit f la fonction définie sur $[5; 20]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1000}{x}.$$

- a. Exprimer $f'(x)$ et vérifier que

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}.$$

- b. Construire le tableau de variations de f sur $[5; 20]$.
 Quel est le minimum de f sur $[5; 20]$?
2. Une casserole est constituée d'un fond de rayon x et d'un cylindre de hauteur h .
 - a. Exprimer la surface $\mathcal{F}$ du fond de la casserole en fonction de x , puis la surface latérale $\mathcal{L}$ du cylindre et le volume $\mathcal{V}$ de la casserole, en fonction de x et h .
 - b. On souhaite construire une casserole de volume imposé $1000\pi \text{ cm}^3$. Calculer h en fonction de x et exprimer la surface totale $\mathcal{S}(x)$ nécessaire.
3. a. Montrer que $\mathcal{S}(x) = 2\pi f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la question 1. En déduire les variations, sur l'intervalle $[5; 20]$, de la fonction $\mathcal{S}$.
- b. Quelles sont les dimensions d'une casserole de $1000\pi \text{ cm}^3$ qui utilise le moins de tôle possible ? Quelle est alors cette surface ?

Exercice 5. 30

Soient x et y deux nombres positifs de somme égale à 1. Soit n un entier naturel.
 Déterminer x et y pour que le produit $P = x^n \times y$ soit maximal.

Exercice 5. 31 (71 p 151)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x - 3.$$

- a. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- b. Vérifier que $f(1) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $x^3 \geq 3 - 2x$.

Exercice 5. 32 (73 p 151)

- a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- b. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 5. 33 (116 p 163)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a $0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

4. a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 b. En déduire un intervalle sur lequel on a $f(x) < 10^{-3}$.
 5. Retrouver le résultat de la question 3. en utilisant l'expression $(\sqrt{x} - 1)^2$.

Exercice 5. 34 inégalité de Bernoulli

n est un entier naturel fixé et t un nombre réel positif. On note (B_n) l'inégalité $(1 + t)^n \geq 1 + nt$.

- Vérifier que B_0 et B_1 sont vraies.
- On suppose $n \geq 2$ et on considère sur $\mathbb{R}_+$ la fonction φ définie par $\varphi(t) = (1 + t)^n - 1 - nt$.
 - Calculer $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$.
 - Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) \geq 0$.
 - En déduire l'inégalité (B_n) .

Exercice 5. 35

Soit f la fonction définie sur $I =]-4; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 4}.$$

- Démontrer que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$.
 Etudier les variations de g sur I et en déduire que $\forall x \in I$, $g(x) > 0$.
- Déduire de la question précédente le signe de f' sur I puis les variations de f sur I .

Exercice 5. 36 (79 p 151)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2; 6]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 8.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

- Calculer $f'(x)$.
 - Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation sur $[-2; 6]$.
- Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}$.
- Soit g la fonction définie sur $[-2; 6]$ par $g(x) = f(x) - (-6x + 12)$.
 - Justifier que g est croissante sur $[-2; 6]$.
 - Calculer $g(2)$.
 - En déduire le signe de $g(x)$ sur $[-2; 6]$.
- Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geq -6x + 12$? Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$ et pour la tangente T ?
- Construire la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T et les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse 0 et 4.

Exercice 5. 37 (80 p 152)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$ et $g(x) = 27x - 5$ et leurs courbes respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ dans un repère.

Déterminer la position relative de ces deux courbes.

Exercice 5. 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités 2 cm.

- Donner l'expression de $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Étudier les variations de f et construire son tableau de variations sur $[-1; 3]$.

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

b. Existe-t-il d'autres points de la courbe en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à T ?

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (-3x + 2).$$

- Justifier que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $g(1)$.
- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geq -3x + 2$?

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ et pour T ?

- Construire la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T et les tangentes aux points d'abscisse 0 et 2.

Exercice 5. 39

φ est la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ où a et b sont deux réels à déterminer. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Quels sont les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction φ ?
- Déterminer a et b pour que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ait pour équation $y = 4x + 3$.
- Préciser les positions de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.
- Dresser le tableau de variations de la fonction φ .
- φ admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}$? Si oui lesquels ?
- Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 3$.
- Tracer la courbe représentative de la fonction φ .

Exercice 5. 40 (89 p 153)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[26; 27]$ par $f(x) = x^2 - 720$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

On admet ici que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur $[26; 27]$ et le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

- On considère le point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 = 26$.
 - Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}$ au point B .
 - Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection I_1 de $\mathcal{T}_0$ et de $\mathcal{C}$.
- On définit par le même processus les points $B_1, B_2, \dots, B_n$ (voir algorithme page 145).
 - Montrer qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point B_n d'abscisse x_n est $y = 2x_n x - x_n^2 - 720$.
 - En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .
 - En utilisant un algorithme comme celui présenté page 145, donner une valeur approchée de α .

Exercice 5. 41 (inégalité des accroissements finis)

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a; b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$.

Montrer que $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

On pourra considérer les fonctions $g : x \mapsto f(x) - Mx$ et $h : x \mapsto f(x) - mx$.

Exercice 5. 42

*

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

On pourra considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(-x)$.

2. Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et $f(0) = 0$.

Exercice 5. 43

**

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

a. on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T .

b. Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a.

Exercice 5. 44

*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I , f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

On se propose de montrer que le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point a . On pose, pour tout x dans I :

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Calculer $g''(x)$ et $g'(a)$.

Déterminer le signe de $g'(x)$, donner le tableau de variations de g et conclure.

Les fonction possédant la propriété précédente sont dites convexes.

6 Fonction exponentielle

Définition 6.1*fonction exponentielle*

On admet qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, on la note $\exp$.

Avec la notation introduite ci-contre la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$;
- $\exp 0 = 1$.

Remarque : la preuve de la propriété précédente permettrait de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

La fonction exponentielle vient compléter la liste des fonctions de référence. Sa définition n'est pas explicite mais les conditions énoncées suffisent à la préciser. On cherche, dans la suite du chapitre à connaître plus précisément cette fonction : propriétés, variations, courbe, etc.

Propriété 6.1*propriétés algébriques*

- i. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
- iii. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$;
- ii. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp x)^n$.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle évoquent les propriétés connues sur les exposants. Pour formaliser cette observation on introduit une nouvelle notation. En posant $e = \exp(1)$ (nombre d'Euler ou constante de Néper, $e = 2,718$ à 10^{-3} près), quelque soit l'entier n on a $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$. En étendant cette égalité à l'ensemble des réels on a, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$. On peut alors reformuler les résultats précédents :

Propriété 6.2*propriétés algébriques*

- i. $e^0 = 1$;
- iii. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- v. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- ii. $\exp'(x) = e^x$;
- iv. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- vi. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$.

Exemple 6.1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les égalités suivantes :

a. $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

b. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2. Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^{2x} \times (e^{-x})^3$

b. $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$

c. $\frac{e^{3x}}{e \times (e^x)^2}$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}}$, alors $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$, ce qui montre que, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 0$. De plus on sait, d'après la remarque précédente, que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$. En utilisant conjointement ces deux résultats on peut écrire la propriété suivante :

Propriété 6.3*signe de la fct exponentielle*

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

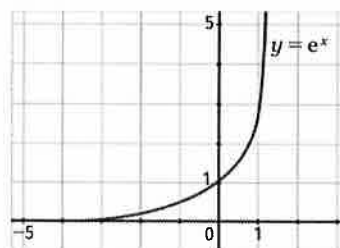
Exemple 6.2

Etudier la monotonie de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x e^x$.

Propriété 6.4*monotonie*

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$			+	
$\exp$		1	e	



La stricte monotonie de la fonction exponentielle permet d'énoncer des équivalences entre égalités et des équivalences entre inégalités permettant de résoudre des équations et des inéquations où figurent des exponentielles.

Propriété 6.5*équations, inéquations*

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; - $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Exemple 6.3

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $e^{3x-1} = 1$;

b. $(e^{3-x})^2 - e^2 = 0$;

c. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(e^x + 1)(e^{-3x} - 1) > 0$;

b. $(x + 3)e^{x^2-2} \leq 0$;

c. $(e^x)^2 \leq \frac{1}{e^2}$.

Si a et b sont deux réels alors la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ où la fonction exponentielle est dérivable. D'après la propriété 4. 5 on peut alors énoncer le résultat suivant :

$$(e^u)' = u' e^u$$

Propriété 6. 6
dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax+b}$

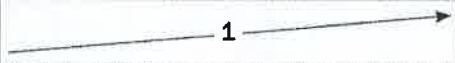
$f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a e^{ax+b}$.

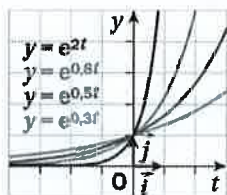
Exemple 6. 4 | Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^{3x+1}$

Conséquence

Soit k un réel strictement positif

La fonction $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{kt}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f_k			



La fonction $g_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-kt}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g_k			

