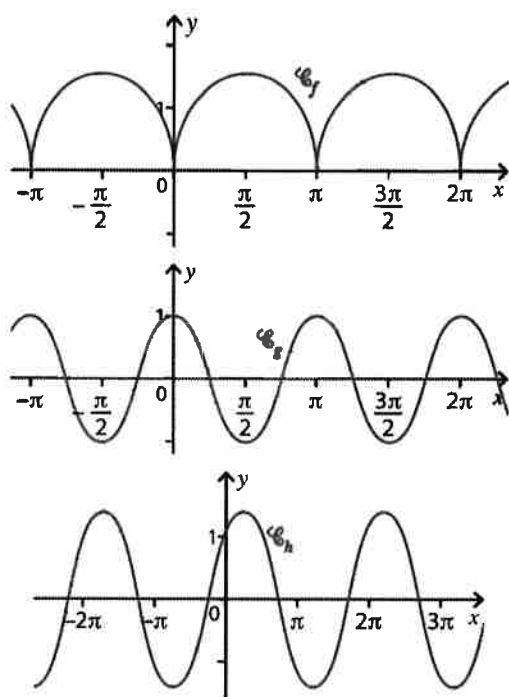


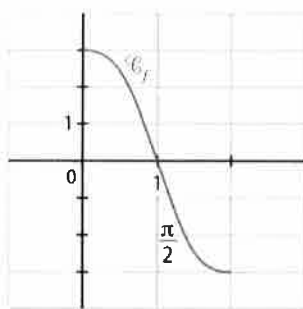
**Exercice 7. 34** (17 p 201)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin(x)$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
b. Que peut-on dire de la fonction f ?
2. Comment peut-on tracer la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$ à partir de la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; \pi]$?
3. a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Que peut-on dire de la fonction f ?
4. Comment peut-on tracer la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$ à partir de la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; \pi]$?

Exercice 7. 35 (80 p 205)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \cos(x)$. On a tracé ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.



1. Reproduire la courbe.
2. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter alors $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$.
3. Calculer $f(x + 2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter alors $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$.

Exercice 7. 36 (82 p 205)

1. Tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis déterminer les antécédents a et b de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans cet intervalle.

2. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Placer alors les deux points images des réels a et b par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique.

Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser ?

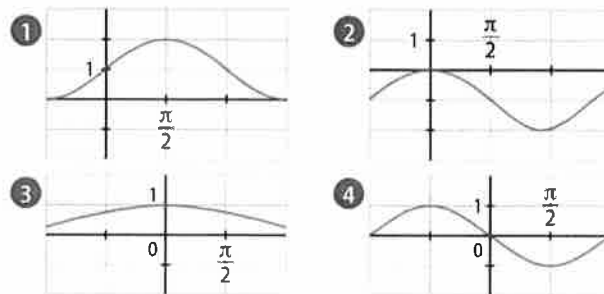
3. Procéder de même pour la résolution de l'équation

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. 37 (83 p 205)

Associer chacune des quatre fonctions suivantes à une des courbes représentatives proposées :

- a. $f(x) = 1 + \sin(x)$
- b. $g(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + 1)$
- c. $h(x) = -\sin(x)$
- d. $k(x) = \cos(x) - 1$

**Exercice 7. 38** (87 p 206)

1. Donner un encadrement de $\cos(x)$ pour tout réel x .
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3 + 2\cos(x)}{5}$.
a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour x dans l'intervalle $[0; 2\pi[$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)
c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $f(x) = \frac{4}{5}$. Le déterminer.
4. a. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π . Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de f ?
b. Étudier la parité de f . Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 7. 39 (sujet B p 213)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que la fonction f est paire.
b. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π .
3. Expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f sur $[\pi; 3\pi]$ et sur $[-3\pi; 3\pi]$ à partir de la représentation graphique de f sur $[-\pi; \pi]$.
4. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-3\pi; 3\pi]$ à l'aide d'une calculatrice.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.
6. a. Montrer qu'il existe deux réels de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin^2(x) = 1$.
Donner ces réels.

b. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ pour x appartenant à $[-\pi; \pi]$.

c. En utilisant la question 3., en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

Exercice 7. 40 (sujet D p 213)

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ par :

$$f(x) = 5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?

2. Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π .

3. Soit M le point de coordonnées $(x; f(x))$, x appartenant à $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Quelle transformation géométrique permet de passer du point M de $\mathcal{C}_f$ au point M' d'abscisse $x + \pi$ de $\mathcal{C}_f$?

4. Dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ avec un pas de $\frac{\pi}{6}$, pour x élément de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, puis sur $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Exercice 7. 41

Un projectile est lancé sous un angle de θ radians à une vitesse de $v \text{ m.s}^{-1}$, avec $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Si la résistance de l'air est ignorée, la distance R , en mètres, qu'il parcourt, indiquée ci-contre, est donnée

$$\text{par } R(\theta) = \frac{v^2}{16} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

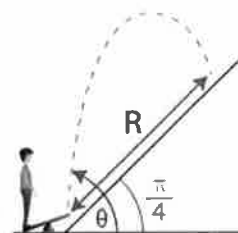
1. On prend $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : \theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \mapsto 2\theta - \frac{\pi}{4}$.

b. En déduire les variations de la fonction R sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Déterminer l'inclinaison θ pour laquelle $R(\theta)$ est maximale.

2. La vitesse initiale v influence-t-elle la valeur de θ pour laquelle $R(\theta)$ est maximale ?



A1 Approximation de π par la méthode d'Archimède (p200)

Archimède, en 250 avant J.-C., détermine une valeur approchée de π en construisant des polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle de rayon 1. Il obtient un encadrement de π avec les demi-périmètres de ces polygones puisque le périmètre de ce cercle est 2π . Ces polygones réguliers ont tous leurs côtés égaux et les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$... sont aussi égaux.

Archimède commence par construire un hexagone régulier inscrit (en **bleu**) et un hexagone régulier circonscrit (en **rouge**), puis les polygones suivants sont obtenus en doublant le nombre de côtés. Archimède continue alors jusqu'à 96 côtés.

On s'intéresse ici au polygone inscrit, coloré en **bleu** sur la figure ci-contre.

1 L'hexagone régulier (6 côtés)

a. Déterminer la nature du triangle OAB , puis la longueur du segment $[AB]$.

b. En considérant l'hexagone, déterminer p_1 , première valeur approchée de π .

2 Passage d'un hexagone inscrit à un polygone inscrit ayant 12 côtés

Sur la figure ci-contre, $[AB]$ est un côté de l'hexagone inscrit dans la question 1, de demi-périmètre p_1 , et $[AJ]$ et $[JB]$ sont des côtés du polygone inscrit à 12 côtés.

On pose $AB = c_1$, et $AJ = c_2$.

a. Rappeler la valeur de c_1 . Calculer la longueur OI en fonction de c_1 à l'aide du théorème de Pythagore.

b. En déduire la longueur IJ , puis la longueur AJ en fonction de c_1 .

c. En déduire la valeur de p_2 , seconde approximation de π par cette méthode.

3 Généralisation : calcul d'une valeur approchée de π par défaut

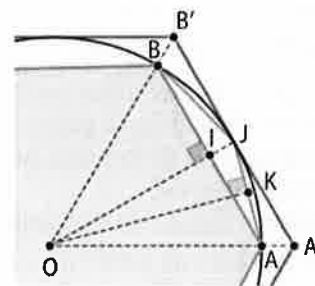
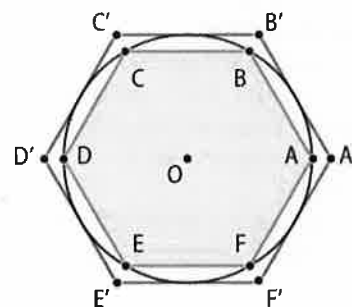
Soit c_n la mesure d'un côté du polygone inscrit à $3 \times 2^{n+1}$ côtés.

Le calcul fait pour le passage de 6 à 12 côtés se généralise et on obtient la formule

$$\text{suivante : } c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}\right)^2}.$$

a. Programmer une fonction Python retournant p_n , valeur approchée de π par défaut obtenue pour un polygone à 3×2^n côtés.

b. À l'aide de cette fonction, déterminer la valeur approchée de π par défaut obtenue par Archimède avec 96 côtés.



8 Produit scalaire

1 Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

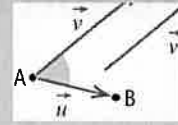
u et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $u \cdot \vec{v}$

invariant.

si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$ où θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Autrement dit, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.



Remarque

$[\vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ mais la réciproque est fausse.

Par exemple dans un triangle ABC rectangle en A : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{2} = 0$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non nuls.

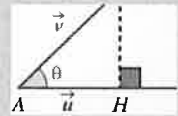
Conséquences

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, $\cos \widehat{BAC} = \cos 0 = 1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\cos \widehat{BAC} = \cos \pi = -1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce produit scalaire est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, et on a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Propriété 8.1

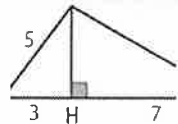
Soient trois points A, B, C (A et B distincts) et H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$



Exemple 8.2

considère le triangle EFG dans lequel on note H le pied de la hauteur issue de F . On suppose que $EF = 5$, $EH = 3$ et $HG = 7$. Calculer $\vec{EF} \cdot \vec{EG}$, $\vec{GE} \cdot \vec{GH}$, $\vec{HF} \cdot \vec{HE}$.



symétrie et bilinéarité du produit sc

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un nombre réel.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

On dit que le produit scalaire est symétrique (i) et bilinéaire (ii et iii).

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5 ; \|\vec{v}\| = 6 ; \vec{u} \cdot \vec{v} = 15.$$

Déterminer $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Calculer $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$.

produit scalaire dans une base orthonormée

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Remarque

Si $\vec{u}(x ; y)$ on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ donc l'égalité $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ s'écrit $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Elle est symétrique
C'est pas une opération (pas commutative)
Mais bon bref !!

2 Orthogonalité de deux vecteurs



vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.



caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conséquences

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un RON.

Exemple 8.5
229)

On considère les points $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, -1)$, $D(-1, 1)$ et on se donne le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Déterminer le réel m tel que $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

3 Applications du produit scalaire

identités remarquables du produit scalaire

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ie : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ie : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ ie : $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Soit ABC un triangle tel que :
 $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 9$.
 Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

Remarque

- les deux premières égalités donnent d'autres expressions du produit scalaire :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- Dans un triangle ABC la deuxième égalité permet d'écrire : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
 On constate que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (th de Pythagore)

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} ;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B} ;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$


d'Al-Kashi

Dans un triangle DEF , $DE = 4$,
 $DF = 7$ et $\hat{D} = 60^\circ$.
 1. Calculer la longueur EF .
 2. Calculer la mesure de l'angle $\hat{E}$.

Remarque

- Ce théorème permet de déterminer les mesures des angles d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés ou la longueur d'un côté connaissant les deux autres et une mesure de l'angle opposé.
- Si le triangle est rectangle en A , on retrouve le théorème de Pythagore.

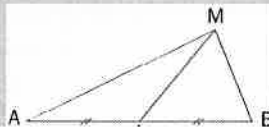
Propriété 8.7

Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Alors, pour tout point M :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} ;$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA} ;$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2.$$



Exemple 8.8

- Soit ABC un triangle tel que :
 $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 9$.
 Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$
1. Calculer CI , en déduire $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
 2. Calculer $\vec{CI} \cdot \vec{AB}$.

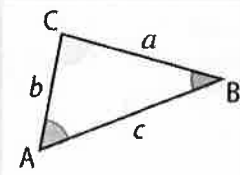
Conséquence

L'égalité $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$ permet d'affirmer que l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. En effet, si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ alors $MI^2 - IA^2 = 0$ donc $MI^2 = IA^2$. Avec $IM \geq 0$ et $IA \geq 0$ on a alors $IM = IA$ donc M est un point du cercle de centre I et de rayon IA .

D1 Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

1. Justifier que $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$.
2. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos(\widehat{BAC})$.
3. En déduire la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

**CORRIGÉ**

1. En utilisant l'expression du produit scalaire avec les longueurs dans le triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2} [c^2 + b^2 - a^2], \text{ ainsi on obtient } 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2.$$

2. En utilisant l'expression du produit scalaire avec le cosinus dans le triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = bc \cos(\widehat{BAC}).$$

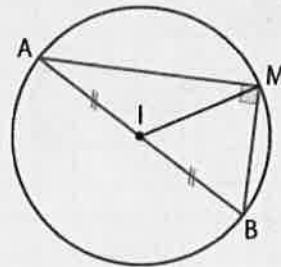
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, on obtient $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

Il vient finalement $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

D2 Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Rappel : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Soit M un point du plan.



1. a. Exprimer de deux façons différentes $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$.

b. En déduire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3. En déduire que le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B .

CORRIGÉ

1. a. D'une part, $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

D'autre part, en utilisant la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}.$$

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = 0$.

En conséquence, on obtient $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.

b. D'après ce qui précède, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$. Or, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA \times IB = MI^2 - \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ revient, d'après la question précédente, à déterminer l'ensemble des points M tels que $MI^2 = \frac{AB^2}{4}$.

Comme $MI \geq 0$ et $AB \geq 0$, cette dernière égalité est équivalente à $MI = \frac{AB}{2}$. Ainsi, l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

3. D'après la question 2., M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont non nuls, ce qui est équivalent, par propriété de l'orthogonalité, au fait que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux et non nuls. Or, par définition, des vecteurs non nuls $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.

Donc ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B .

Démonstration 1 : Symétrie du produit scalaire

En utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs, donner l'expression de $\vec{v} \cdot \vec{u}$ et en déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Démonstration 2 : Angle dans un triangle

Rappel : La mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'unique réel $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta [2\pi]$.

Soit A, B, C trois points distincts. On considère θ la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on pose $\widehat{BAC} = |\theta|$.

- Justifier que $\cos(\theta) = \cos(\widehat{BAC})$.
- En utilisant l'expression du produit scalaire avec le cosinus, démontrer que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.

Démonstration 3 : Identités remarquables du produit scalaire

- En remarquant que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, démontrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- En déduire que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- Démontrer que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration 4 : Expression du produit scalaire avec les normes

Développer l'expression $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et en déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$.

Démonstration 5 : Expression du produit scalaire avec les longueurs d'un triangle

Soit A, B, C trois points du plan.

- Écrire sous la forme d'un vecteur la différence $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$.

Démonstration 6 : Démonstration d'une relation d'Al-Kashi

- Calculer $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ de deux façons : en utilisant la relation de Chasles et en développant le carré scalaire.
- En déduire la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

Démonstration 7 : Orthogonalité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, déterminer les mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.
- b. En déduire la valeur de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Faire la synthèse des questions précédentes et conclure.

Démonstration 8 : Propriété du produit scalaire avec les projetés orthogonaux

Soit A, B, C, D quatre points distincts et soit A' et B' , les projetés orthogonaux respectifs sur la droite (CD) des points A et B .

- Quelle est la valeur de $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CD}$? Justifier.
- En utilisant la relation (de Chasles) suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Démonstration 9 : Propriété du produit scalaire avec les projetés orthogonaux

Soit A, B, C trois points distincts, θ la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. a. Si $0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB' \times AC$.

2. Si $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB' \times AC$.

Démonstration 10 : Formule de la médiane

Rappels

1. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

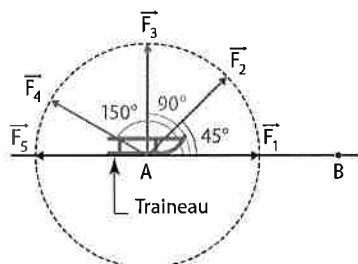
Soit un segment [AB] ainsi que son milieu I et soit M un point du plan.

1. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$, justifier que $MA^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2$.

2. En déduire que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Activité 1 : découvrir le produit scalaire (p 220)

Baptiste débute comme pilote d'attelage. Il s'entraîne sur une trajectoire rectiligne de A vers B. On exerce une force $\vec{F}$ sur le traîneau et on s'intéresse à son influence sur le déplacement.



1. a. Parmi les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$ représentées ci-dessus, quelles sont celles qui semblent favorables au mouvement ? Celles qui semblent s'y opposer ? Celles qui semblent ne pas avoir d'effet sur le mouvement du traîneau ?
- b. D'une façon plus générale, à quelles conditions une force est-elle favorable au déplacement ? Défavorable ? Sans effet ?

2. En physique, Coriolis appelle travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A vers B la quantité W égale à $F \times AB \times \cos(\alpha)$. W représente une énergie et s'exprime en joules, F est la norme de $\vec{F}$ exprimée en newtons, AB est en mètres et α est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Dans l'exemple précédent, on suppose que les forces $\vec{F}_i$ ont une intensité égale à 400 newtons et que la distance AB vaut 1 000 m.

- a. Calculer et comparer les quantités W pour chacune de ces forces.

Commenter à l'aide du signe de W les conjectures établies à la question 1. b..

- b. Quelle est la force la plus favorable au déplacement ? La plus défavorable ?

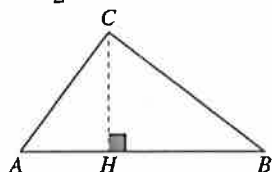
La quantité W est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ et on note cette opération $\vec{F} \cdot \vec{AB}$.

Ainsi, $\vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\alpha)$.

Activité 2 : découvrir une formule métrique du produit scalaire et la formule d'Al-Kashi

On considère un triangle acutangle ABC (ie : dont tous les angles sont aigus). On souhaite établir, à l'aide d'outils élémentaires, la formule métrique du produit scalaire suivante :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (E)$$



1. On considère H le pied de la hauteur issue de C .
- a. Exprimer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de AH et AB .

- b. En exploitant le théorème de Pythagore, exprimer AC^2 et CB^2 en fonction de CH , AH et AB .

- c. En déduire l'égalité (E) puis la formule dite d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$.

La formule d'Al-Kashi est appelée « théorème de Pythagore généralisé ». Expliquer pourquoi.

2. Applications

En utilisant la formule métrique du produit scalaire ou la relation d'Al-Kashi, répondre aux questions suivantes.

- a. Déterminer les mesures des angles d'un triangle ABC de côtés $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$ (donner une valeur arrondie au degré près).
- b. Déterminer la longueur exacte du troisième côté d'un triangle DEF vérifiant $DE = 3$, $EF = 5$ et $\widehat{DEF} = 60^\circ$.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

Exercice 8. 1 (43 p 230)

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5 et I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$, $\vec{CI} \cdot \vec{CA}$ et $\vec{IB} \cdot \vec{BC}$.

Exercice 8. 2

ABCD est un carré de côté 4, BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu du côté [BC].

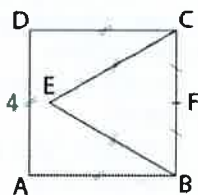
Calculer les produits scalaires :

a) $\vec{EB} \cdot \vec{EC}$

b) $\vec{CE} \cdot \vec{CF}$

c) $\vec{CD} \cdot \vec{CE}$

d) $\vec{BA} \cdot \vec{BF}$

**Exercice 8. 3**

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$ et $C(2; 0)$.

Calculer :

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$

c) $\vec{AB}^2$

d) AB

Exercice 8. 4

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC = 5$. D, E et F sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].

On introduit le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{5}\vec{AB}, \frac{1}{5}\vec{AC}\right)$.

a) Réaliser une figure et déterminer les coordonnées des points A, D, E et F.

b) Calculer $\vec{AF} \cdot \vec{ED}$ et interpréter le résultat.

Exercice 8. 5 (53 p 230)

Soit un carré ABCD de centre O et de côté 5. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD].

Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{BO} \cdot \vec{BI}$

b. $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AO}$ et $\vec{CJ} \cdot \vec{IB}$

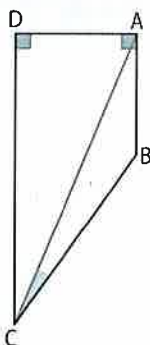
Exercice 8. 6 (87 p 233)

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $DC = 7$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$, $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$, $\vec{DC} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{DB} \cdot \vec{DC}$.

2. En décomposant les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{DB}$, calculer $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$.

3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ et en déduire une valeur approchée de la mesure l'angle $\widehat{ACB}$, au degré près.

**Exercice 8. 7**

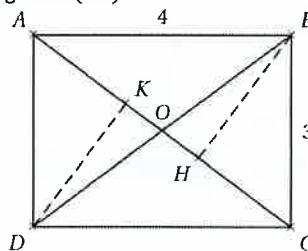
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 2)$, $B(2; 3)$ et $C(4; 1)$.

a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Calculer $\cos(\widehat{BAC})$. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir à l'unité.

Exercice 8. 8

ABCD est un rectangle de longueur 4 cm, de largeur 3 cm et de centre O. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



- En décomposant les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{BD}$, calculer $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$.
- En exprimant d'une autre manière le produit scalaire $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$, déterminer HK.
- Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{CA; BD})$.

Exercice 8. 9 (79 p 232)

Soit les points $A(-6; 4)$, $B(-2; 2)$ et $C(5; -7)$.

1. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

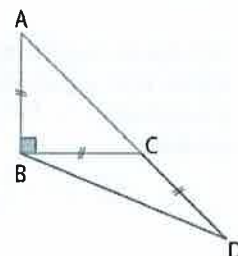
2. On note H le projeté orthogonal de A sur [BC].

Montrer que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$.

3. Calculer BC. En déduire BH et HC.

Exercice 8. 10 (sujet D p 241)

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que $BA = 1$. On construit extérieurement au triangle ABC un point D tel que le triangle BCD soit isocèle en C. On admet que les points A, C et D sont alignés. On se place dans le repère orthonormé $(B; \vec{BC}, \vec{BA})$.



- a. Calculer la longueur du segment [AC]. En déduire celle du segment [AD].
- Montrer qu'il existe un réel k tel que $\vec{AD} = k\vec{AC}$ et déterminer sa valeur.
- En déduire les coordonnées de D.
- Déterminer la mesure exacte, en radians, de l'angle $\widehat{BCD}$ puis des angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{DBC}$.
- a. Calculer le produit scalaire $\vec{DA} \cdot \vec{DB}$.
- En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 8. 11 (129 p 235)

Soit trois points A, B et C sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soit I le milieu de [BC] et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle.

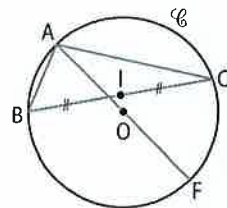
1. Démontrer que :

a. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = AB^2$

b. $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = AC^2$

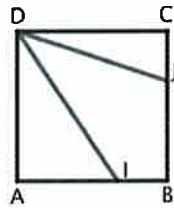
2. a. Justifier que $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$.

b. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2\vec{AI} \cdot \vec{AF}$.



Exercice 8. 12

$ABCD$ est un carré de côté 4. I est un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et J est un point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.



Dans les questions 1 et 2 on se propose de déterminer, de deux façons différentes, une mesure en degré de l'angle $\widehat{IDJ}$, arrondie au degré près.

1. Première méthode.

a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC}$ et calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.

b. Conclure.

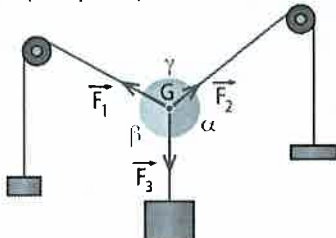
2. Seconde méthode.

On considère le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

a. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.

b. En déduire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$ et conclure.

3. On suppose que $ABCD$ est un carré quelconque et on pose $l = AB$. Démontrer que $\widehat{IDJ}$ est indépendant de l .

Exercice 8. 13 (157 p 245)

Le schéma ci-dessus représente un système de poulies. On considère les forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ s'appliquant en G et d'intensités respectives : $\|\vec{F}_1\| = 8$ N, $\|\vec{F}_2\| = 6$ N et $\|\vec{F}_3\| = 12$ N.

Soit $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ la résultante de ces forces.

1. Déterminer en fonction de α , β et γ les produits scalaires suivants : $\vec{R} \cdot \vec{F}_1$, $\vec{R} \cdot \vec{F}_2$ et $\vec{R} \cdot \vec{F}_3$.

2. On suppose que le système de poulies est à l'équilibre, c'est-à-dire que $\vec{R} = \vec{0}$.

a. Montrer que les réels α , β et γ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\cos\beta = -6 \\ 6\cos\beta + 3\cos\gamma = -4 \\ 6\cos\alpha + 4\cos\gamma = -3 \end{cases}$$

b. En utilisant la troisième équation, montrer que :

$$\cos\gamma = -\frac{1}{4}(3 + 6\cos\alpha)$$

c. En déduire que les réels α et β vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\cos\beta = -6 \\ 18\cos\alpha + 4\cos\beta = -3 \end{cases}$$

d. En déduire les valeurs, arrondies au dixième de degré, des mesures des angles α , β et γ .

Exercice 8. 14 (Barbazo 91 p 235)

Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à d . On note H le projeté orthogonal de A sur d et M un point quelconque de d .

1. Justifier que $AM^2 \geq AH^2$. En déduire que la distance AH est la plus petite des distances de A aux points de d . AH est appelée la **distance du point A à la droite d** .

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $(x_A; y_A)$ les coordonnées de A , $(x_H; y_H)$ les coordonnées de H et $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de d .

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

b. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ de deux façons différentes, démontrer que $AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3. **ALGO PYTHON** Écrire le script d'une fonction Python dont les arguments sont les coordonnées respectives de trois points A , B et C et qui renvoie la hauteur du triangle ABC issue de A .

2 Orthogonalité de deux vecteurs**Exercice 8. 15** (71 p 231)

Soit les points $A(-2; 3)$, $B(7; 0)$, $C(4; 5)$ et $D(2; -1)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 8. 16 (73 p 231)

Soit les points $A(2; 4)$, $B(-4; 6)$, $C(-2; 0)$ et $D(4; -2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{BD}^2$.

4. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

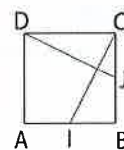
Exercice 8. 17 (75 p 232)

Soit le triangle EFG tel que $E(0; 1)$, $F(8; -3)$ et $G(12; 5)$.

Le point $H(7; 0)$ appartient-il à la hauteur issue de F ?

Exercice 8. 18 (80 p 232)

$ABCD$ est un carré, tel que I et J sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$. Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.



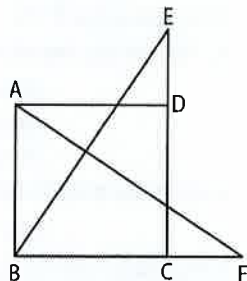
Exercice 8. 19 (124 p 235)

ABCD est un carré de côté 1.

On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :

- en décomposant $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$;
- en se plaçant dans le repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

**Exercice 8. 20** (sujet B p 243)

Soit ABCD un rectangle de longueur $AB = 5$ et de largeur $AD = 2$. Soit M un point du segment [AB] distinct de A et de B, tel que $AM = x$.

- Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 5x$.
- Pour quelle valeur de x les droites (MD) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?
- Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 - 5x + 4$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle MCD est-il rectangle en M ?
- Rappeler le lien entre la nature de l'angle $\widehat{CMD}$ et le signe de $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}$.
 - Pour quelle(s) valeur(s) de x , l'angle $\widehat{CMD}$ est-il obtus ?

Exercice 8. 21

Dans le carré direct ABCD, de côté égal à l'unité de longueur, on considère les points I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5} \overrightarrow{CB}$. Un point M décrit le segment [DC]. On pose $\overrightarrow{DM} = x \overrightarrow{DC}$.

- En utilisant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ déterminer x pour que les droites (IJ) et (BM) soient perpendiculaires.
- Dans la suite, on désigne par K le point de [DC] tel que $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{DC}$.
 - Le triangle IJK est-il rectangle ?
 - Déterminer une valeur approchée, à $0,1^\circ$ près, de l'angle $\widehat{IJK}$.
- Soit H le point d'intersection des droites (BK) et (IJ) et L le point d'intersection de la droite (IJ) avec la parallèle à (BK) passant par D.
 - Etablir que $IJ = KB = \frac{\sqrt{29}}{5}$.
 - Justifier que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK} = IJ \times LH$. En calculant $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK}$ d'une autre façon déterminer la valeur de LH.
 - En calculant $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KB}$ de deux façons, déterminer KH.
 - On admet que $DL = \frac{4}{\sqrt{29}}$. Déterminer l'aire du trapèze DLHK.

Exercice 8. 22

$\widehat{xOy}$ est un angle droit, $OA = OC$ et $AB = CD$. I est le milieu de [AD].

Le but de l'exercice est de montrer, avec deux méthodes différentes, que les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Méthode 1

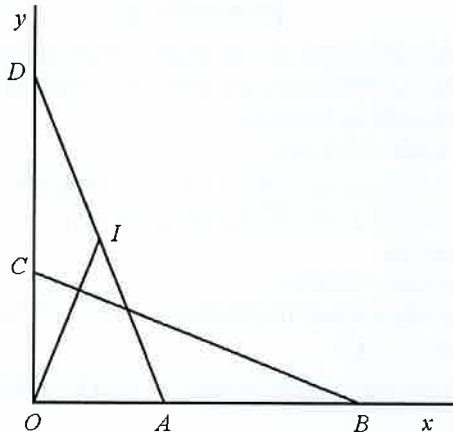
- Montrer que $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$.
- En déduire que $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$.

- Calculer $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis conclure.

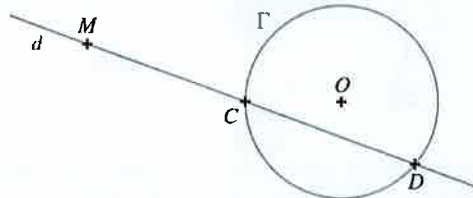
Méthode 2

On considère le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{OD} = b\vec{j}$, où a et b désignent deux réels strictement positifs.

- Calculer en fonction de a et b les coordonnées de A, D, B, C et I.
- Conclure.

**Exercice 8. 23** (Déclic 113 p 265)**Puissance d'un point par rapport à un cercle**

On considère un cercle Γ , de centre O et de rayon R , et un point M du plan. Pour toute droite d du plan passant par M , on note C et D les points d'intersection, s'ils existent, du cercle Γ et de la droite d .



- Soit une droite d passant par M pour laquelle les points C et D existent (ils sont éventuellement confondus).

a. Quel est le signe de $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ dans le cas où :

- M est à l'intérieur du cercle Γ ?
- M appartient au cercle Γ ?
- M est à l'extérieur du cercle Γ ?

b. Soit C' le symétrique de C par rapport à O .

Montrer que :

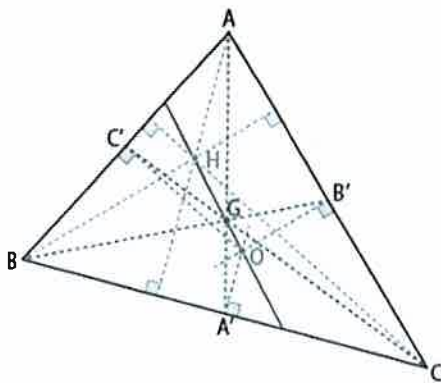
$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC'} = OM^2 - R^2$$

- Que peut-on dire du produit scalaire $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ lorsque la droite d pivote autour de M ?

- Soit un réel $k > -R^2$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = k$.

Exercice 8. 24 (155 p 244)

Soit ABC un triangle non équilatéral. On désigne par G le centre de gravité du triangle (c'est-à-dire le point de concours de ses médianes), par O le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle (c'est-à-dire le point de concours des médiatrices) et par H son orthocentre. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].



On rappelle que le point G vérifie l'égalité vectorielle : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

1. Soit le point K tel que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OK}$.

a. Montrer que $\vec{AK} = 2\vec{OA}$. En déduire que la droite (AK) est perpendiculaire au côté [BC].

b. Démontrer de même que la droite (BK) est perpendiculaire au côté [AC].

c. En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC, donc que K et H sont confondus.

2. Montrer que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.

Cette égalité prouve que les points O, G et H sont alignés. La droite qui porte ces trois points s'appelle la « droite d'Euler ».

3 Applications du produit scalaire

Exercice 8. 25 (106 p 234)

produit scalaire et norme

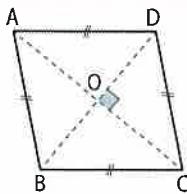
Soit ABCD un losange de centre O tel que AC = 8 et BD = 6.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.

2. a. Simplifier la somme vectorielle $\vec{AB} + \vec{AD}$.

b. En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

3. Justifier l'égalité $\vec{DA} - \vec{CD} = \vec{DB}$ puis calculer $\vec{DA} \cdot \vec{CD}$.



Exercice 8. 26 (108 p 234)

produit scalaire et norme

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2. En remarquant que $\vec{BC} = (\vec{BA} + \vec{AC})$, calculer BC.

3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle ACB au degré près.

Exercice 8. 27 (109 p 234)

produit scalaire et norme

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2. En remarquant que $\vec{BC} = (\vec{BA} + \vec{AC})$, calculer BC.

3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle ACB au degré près.

Exercice 8. 28 (89 p 233)

Al-Kashi

Le triangle DEF est tel que DE = 6, DF = 3 et $\widehat{D} = \frac{\pi}{4}$. Calculer EF.

Exercice 8. 29 (96 p 233)

Al-Kashi

Dans un triangle ABC on a AB = 6, AC = 4 et BC = 5.

1. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$, puis $\widehat{BAC}$ au degré près.

2. Donner la valeur exacte de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Exercice 8. 30 (94 p 233)

Al-Kashi

Soit un triangle DEF tel que DE = 9, DF = 4 et $\widehat{EDF} = 65^\circ$.

1. Donner une valeur approchée de EF à 0,1 près.

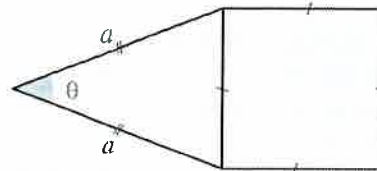
2. En déduire une valeur approchée des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DFE}$, au dixième de degré près.

Exercice 8. 31 (103 p 234)

Al-Kashi

La figure ci-dessous est constituée d'un carré et d'un triangle isocèle. On veut déterminer pour quelle valeur de θ le carré et le triangle isocèle ont le même périmètre.

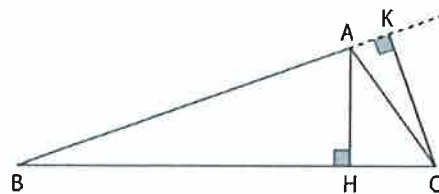
Calculer une valeur de θ à 0,1 degré près.



Exercice 8. 32 (sujet E p 243)

Al-Kashi

On considère un triangle ABC tel que BC = 7, AC = 2 et AB = 6. Soit H le pied de la hauteur issue de A, et K le pied de la hauteur issue de C.



1. a. Justifier que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

b. En déduire les produits scalaires suivants : $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ puis $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

c. Exprimer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en fonction de la longueur BH.

d. En déduire la longueur BH.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en fonction de la longueur BK.

b. En déduire que $BK \times BA = BH \times BC$.

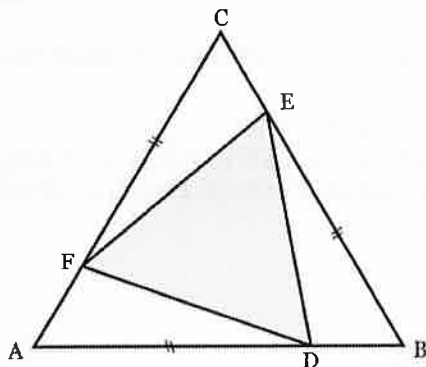
c. En déduire la longueur BK.

3. a. Calculer la mesure, au degré près, de l'angle $\widehat{ABC}$.

b. En déduire la longueur KH arrondie à l'unité, puis la mesure au degré près de l'angle $\widehat{KAH}$.

Exercice 8. 33 (livrescolaire 71 p 271)*Al-Kashi*

Dans un triangle équilatéral ABC de côté 1, on place les points D , E et F comme indiqué sur la figure. Le but de l'exercice est de minimiser l'aire du triangle DEF .



1. Posons $x = AD$. En utilisant la relation d'Al-Kashi, déterminer les longueurs DE , EF et FD en fonction de x .
2. Quelle est la nature du triangle DEF ?
3. Démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ et en déduire que l'aire de DEF est minimale si DE est minimale.
4. a. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$
 b. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ?

Exercice 8. 34 (Hatier 156 p 246)*points cocycliques*

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point K .

1. On suppose que les points A , B , C et D sont *cocycliques*, c'est-à-dire qu'il existe un point I tel qu'un cercle $\mathcal{C}$ de centre I passe par ces quatre points. On note A' le point tel que $[AA']$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

- a. Justifier que $(KB) \perp (BA')$.
 - b. Prouver que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = KI^2 - AI^2$.
 - c. Prouver que $\vec{KC} \cdot \vec{KD} = KI^2 - CI^2$.
 - d. En déduire que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = \vec{KC} \cdot \vec{KD}$.
2. Réciproquement, on suppose que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = \vec{KC} \cdot \vec{KD}$. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC . La droite (KC) coupe alors le point $\mathcal{C}$ en un point E , non confondu avec le point C .
- a. En utilisant le résultat de la question 1d, prouver que $\vec{KC} \cdot \vec{KD} = \vec{KC} \cdot \vec{KE}$.
 - b. En déduire que les vecteurs $\vec{KC}$ et $\vec{DE}$ sont orthogonaux, puis que $\vec{DE} = \vec{0}$.
 - c. Conclure quant à la cocyclicité des points A , B , C et D .

Exercice 8. 35 (Hatier 94 p 238)*th médiane*

- a. Un segment $[AB]$ est de longueur 9 et de milieu I . Sachant qu'un point M est tel que $MA = 4$ et $MB = 7,5$, calculer la distance MI .
- b. Dans un triangle DEF , on note E' le milieu de $[DF]$. Sachant que $EE' = 10$, $DE = 15$ et $DF = 21$, calculer la distance EF .

c. Un triangle GHL est tel que $GH = 7$, $GL = 12$ et $HL = \sqrt{60}$. Calculer la longueur des médianes issues de H et de L .

Exercice 8. 36 (livrescolaire 58 p 270)*th médiane*

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 15$, $BC = 13$ et $AC = 14$.

1. Déterminer la longueur BD .
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré près.

Exercice 8. 37 (livrescolaire 55 p 270)*th médiane*

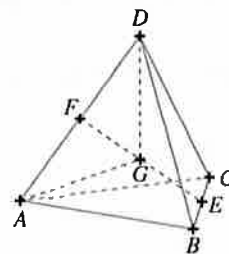
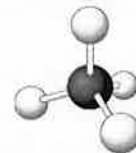
Dans le triangle ABC , on note A' le milieu de $[BC]$. On donne les mesures suivantes : $AA' = 6$, $A'B = 4$ et $(\vec{A'A}, \vec{A'B}) = \frac{\pi}{3}$.

1. À l'aide d'une des formules du théorème de la médiane, calculer $AB^2 + AC^2$.
2. a. Calculer $\vec{A'A} \cdot \vec{A'B}$.
 b. Écrire $\vec{CB}$ en fonction de $\vec{A'B}$.
 c. En déduire $\vec{CB} \cdot \vec{AA'}$ et $AB^2 - AC^2$.
3. Quelles sont alors les longueurs des côtés du triangle ABC ?

Exercice 8. 38 (Déclic 94 p 262)*th médiane*

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier ;
 - le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.
- Le but de cet exercice est de déterminer la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène.**



On considère le tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête a . E et F sont les milieux respectifs des arêtes $[CB]$ et $[AD]$. On admet que le centre G du tétraèdre est situé au milieu du segment $[EF]$ et qu'il est équidistant des sommets A , B , C et D .

1. En se plaçant dans des triangles bien choisis, montrer que $DE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
2. On se place dans le triangle AED .
 a. Calculer la longueur EF , en déduire GE .
 b. Montrer alors que $GA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. Pour ce calcul, on

pourra utiliser le « théorème de la médiane ».

3. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{AGD}$ arrondie au degré. Conclure.

Exercice 8. 39 (Déclic 100 p 262) *lignes de niveaux*

Soient A et B deux points tels que $AB = 4$. Pour tout réel k , on note L_k l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

2. Déterminer puis construire, lorsque cela est possible, l'ensemble L_k dans les cas suivants.

a. $k = -7$ b. $k = -4$ c. $k = 0$ d. $k = 5$

3. Déterminer la nature de l'ensemble L_k selon les valeurs du réel k .

4. Soit un point C tel que ABC soit un triangle équilatéral. Déterminer la valeur du réel k tel que $C \in L_k$.

Exercice 8. 40 (Barbazo 82 p 234) *lignes de niveaux*

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(2; -1)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. On veut réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

a. Placer le point A et créer le vecteur $\vec{u}$.

b. Créer trois points M_1, M_2 et M_3 puis les vecteurs $\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AM_3}$.

c. Calculer, avec le logiciel, les produits scalaires $\overrightarrow{AM_1} \cdot \vec{u}$, $\overrightarrow{AM_2} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_3} \cdot \vec{u}$.

d. En déplaçant les points M_1, M_2 et M_3 , conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 16$.

2. On veut démontrer cette conjecture. On considère un point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$. Déterminer la valeur de k telle que C appartienne à la ligne de niveau cherchée.

3. Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = 0$. En déduire la ligne de niveau cherchée.

Exercice 8. 41 (Barbazo 83 p 234)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3; -1)$ et $B(1; 1)$. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 10$ (cet ensemble est appelé ligne de niveau 10).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire trois points M_1, M_2 et M_3 appartenant à cette ligne de niveau.

2. En développant l'expression $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, montrer que la ligne de niveau cherchée est équivalente à la ligne de niveau $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$, où I est le milieu de $[AB]$.

3. Démontrer, en utilisant l'exercice précédent, que cette ligne de niveau est une droite dont on donnera les caractéristiques.