

10 probabilités conditionnelles

1 Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P . A , B et C sont trois événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

Définition 10.1

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre $P_A(B)$ (« P de B sachant A ») défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(B|A)$$

Exemple 10.1

Dans une classe de première, 55 % des élèves sont des filles et 40 % des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

Conséquences

- $P_A(B) \in [0; 1]$;
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$;
- $P_A(\Omega) = 1$;
- $P_A(\emptyset) = 0$;
- $P_A(A) = 1$;
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$;
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$;

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrée permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B ;
- $P(A)$ (resp $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (resp ligne) ;
- $P_A(B)$ s'obtient en calculant le quotient des probabilités $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Exemple 10.2

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,4	0,3	0,7
$\bar{A}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,6	0,4	1

Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P_B(\bar{A})$ et $P_{\bar{A}}(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

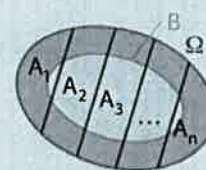
2 Formule des probabilités totales

Propriété 10. 1

On considère un événement B et des événements non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Ω deux à deux disjoints (ou incompatibles) dont la réunion forme l'univers Ω .

- On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω (ou est un système complet d'événements).
- $P(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i \cap B)$.

partition, formule des probabilités totales



Remarque

Si $0 < P(A) < 1$, les événements A et $\bar{A}$ partitionnent Ω donc $P(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$.

Utilisation d'un arbre

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilités par un arbre et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.

On appelle arbre pondéré un arbre pour lequel chaque branche est associée à une probabilité, comme ci-dessous.

Etape 1	Etape 2	Evènement	Probabilité de l'évènement
	$p_A(B)$ B	$A \cap B$	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
	$p_A(\bar{B})$ $\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p_A(\bar{B})$
	$p_{\bar{A}}(B)$ B	$\bar{A} \cap B$	$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$
	$p_{\bar{A}}(\bar{B})$ $\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B})$

Règles d'utilisations :

1. La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
2. La probabilité d'un événement représenté par un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

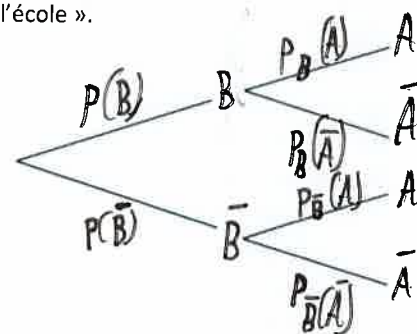
Exemple 10.3

Un élève de terminale a 80 % de chance d'avoir le bac. Pendant les vacances d'été qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves, bacheliers ou non.

Lorsqu'un élève a eu le bac il a 60 % de chance de réussir le concours, 30 % sinon.

On note B l'événement « réussir le bac » et A l'événement « admis à l'école ».

1. Déterminer $p(B)$, $p(\bar{B})$, $p_B(A)$ et $p_{\bar{B}}(A)$.
2. Représenter l'expérience décrite en complétant l'arbre ci-contre.
3. Calculer la probabilité que l'élève ait le bac et soit admis à l'école.
4. Quelle est la probabilité que l'élève n'ait pas le bac et soit admis à l'école ?
5. Déterminer la probabilité que l'élève soit admis à l'école.
6. On interroge un élève de l'école. Quelle est la probabilité qu'il ait le bac ?



3 Indépendance

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω muni d'une probabilité P .

Définition 10. 2

A et B indépendants

On dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 10. 2

A et B indépendants

Si $P(A) \neq 0$, A et B indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Remarque

- $P_A(B) = P(B)$ signifie que la réalisation de B ne dépend pas de la réalisation de A

- On peut démontrer que si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants et donc que A et $\bar{B}$ ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exemple 10. 4

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

Succession de deux épreuves indépendantes

Lorsque deux épreuves sont indépendantes la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple 10. 5

Un sac contient dix jetons dont trois sont verts.

On pioche successivement, au hasard, avec remise, deux jetons du sac. On appelle V_1 l'évènement « obtenir un jeton vert au premier tirage » et V_2 l'évènement « obtenir un jeton vert au second tirage ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de $V_1 \cap V_2$ et de $\bar{V}_1 \cap V_2$.

Démonstration 1 : indépendance avec événement contraire

Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

1. Dans cette question, on suppose A et B indépendants.

a. Écrire la définition du fait que $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.

b. En remarquant que $B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$, montrer que $P(B) - P(B) \times P(A) = P(B \cap \bar{A})$.

c. En déduire que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$.

2. En utilisant la question précédente, et sans autre calcul, montrer que, réciproquement, si $\bar{A}$ et B sont indépendants, alors A et B sont indépendants.

3. **Complément** : expliquer pourquoi la proposition 1 permet aussi d'affirmer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont également indépendants si A et B le sont.

Démonstration 2 : probabilité sachant un événement

Soit A un événement relatif à une expérience aléatoire d'univers Ω fini et tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B relatif à la même expérience aléatoire, on pose $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

1. Justifier le fait que $P(A \cap B) \leq P(A)$.

2. Montrer que pour tous événements B et C relatifs à l'expérience aléatoire considérée, on a :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. Démontrer que la fonction P_A est une probabilité sur l'univers Ω .

Démonstration 3 : condition nécessaire et suffisante à l'indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire, avec $P(A) \neq 0$.

1. Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$.

2. Démontrer que la réciproque est également vraie.

Démonstration 4 : formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ une partition d'un univers dont chaque événement est de probabilité non nulle et B un événement de cet univers.

1. Justifier l'égalité des deux événements B et $(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)$.

2. En déduire que :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k).$$

Activité 1 : découvrir la notion de probabilité conditionnelle

Le tableau ci-contre donne la répartition des 1 230 élèves d'un lycée en fonction du sexe et du niveau de la classe de l'élève.

On choisit un élève du lycée au hasard.

On note respectivement S , P , T et F les événements « l'élève est en Seconde », « l'élève est en Première », « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille ».

Les probabilités seront données sous forme fractionnaire.

	Fille	Garçon
Seconde	187	233
Première	207	178
Terminale	212	213

1. a. Calculer la probabilité des événements S , P , T et F .
- b. Décrire par une phrase l'événement $S \cap F$ et calculer sa probabilité.
2. On choisit un élève au hasard parmi les élèves de Seconde.
 - a. Combien d'élèves peuvent être tirés au sort ?
 - b. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille. On la note $P_S(F)$.
 - c. Exprimer $P_S(F)$ en fonction de $P(S)$ et de $P(S \cap F)$.
3. On choisit un élève au hasard parmi les filles.
 - a. Calculer la probabilité conditionnelle $P_F(T)$ que cet élève soit en terminale sachant que c'est une fille.
 - b. Exprimer $P_F(T)$ en fonction de $P(S)$ et de $P(F \cap T)$.
4. a. Décrire par une phrase l'événement $P_T(\bar{F})$ et calculer sa probabilité.
- b. Exprimer $P_T(\bar{F})$ en fonction de $P(T)$ et de $P(T \cap \bar{F})$.

Activité 2 : utiliser la formule des probabilités totales

Une école de danse propose six cours de danse : un cours de danse classique et un cours de danse modern jazz, chacun à un niveau débutant, intermédiaire ou avancé. On suppose qu'un élève ne suit pas de cours de niveaux différents pour le même style de danse et qu'il y a des élèves inscrits dans tous les cours.

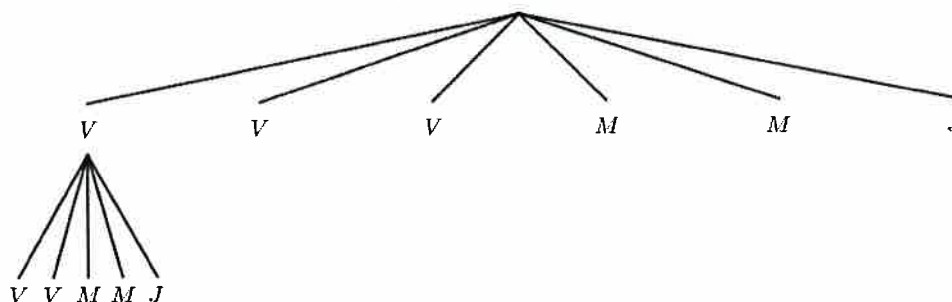
On choisit au hasard un élève de l'école et on lui demande ce qu'il suit comme cours. On note :

- C l'événement : « l'élève suit un cours de classique » ;
 - M l'événement : « l'élève suit un cours de modern jazz » ;
 - D l'événement : « l'élève suit un cours de niveau débutant » ;
 - I l'événement : « l'élève suit un cours de niveau intermédiaire » ;
 - A l'événement : « l'élève suit un cours de niveau avancé ».
1. a. Que peut-on dire des événements D , I et A pris deux par deux ?
 - b. Justifier que les événements D , I et A ne sont pas vides et que $D \cup I \cup A = \Omega$ où Ω est l'univers de toutes les issues.
 2. a. Que peut-on dire des événements $C \cap D$, $C \cap I$ et $C \cap A$, pris deux par deux ?
 - b. Justifier que l'on a $(C \cap D) \cup (C \cap I) \cup (C \cap A) = C$.
 - c. En déduire que $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap I) + P(C \cap A)$.

Activité 3 : utiliser un arbre pondéré

Dans un cageot de six choux-fleurs trois sont verts (V) deux sont mauves (M) et un est jaune (J). L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un chou-fleur dans le cageot, sans le remettre dedans, puis un second et à noter les couleurs obtenues dans l'ordre d'apparition. Par exemple $(V ; M)$ est l'événement : le premier chou-fleur est vert, le second est mauve.

1. a. Compléter l'arbre des possibles suivant.



- b. Comment détermine-t-on le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement $(V ; M)$?
- c. Calculer $P(V ; M)$.

3×2

2. Dans la mesure où seule la couleur des choux-fleurs nous intéresse, on peut réduire la taille de l'arbre, moyennant quelques conventions d'écriture. Par exemple les trois branches correspondant à un chou-fleur vert peuvent être remplacées par une seule branche.

A chaque tirage, les événements V, M, J n'étant pas équiprobables, on pondère alors les branches menant à une couleur par le nombre de choux-fleurs de cette couleur.

a. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Comment retrouve-t-on le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement $(V; M)$?

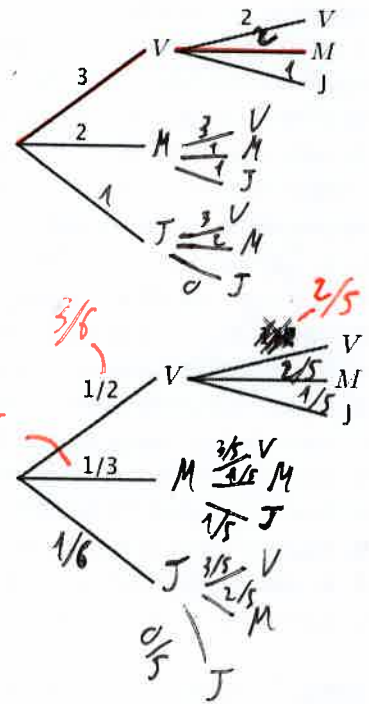
3. Une autre idée consiste à pondérer chaque branche d'un même tirage, non plus avec le nombre de choux-fleurs d'une même couleur comme dans l'arbre précédent, mais par la probabilité d'obtenir cette couleur.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Calculer le produit des probabilités rencontrées sur le chemin représentant l'événement $(V; M)$.

c. Quelle probabilité retrouve-t-on ? Expliquer.

d. Calculer la probabilité d'obtenir un chou-fleur mauve puis un jaune.



Activité 4 : découvrir la notion d'événements indépendants.

On considère les deux situations suivantes :

Situation 1 : On demande à des personnes si elles ont eu le bac (B) et si elles ont les cheveux courts (C). On note les proportions dans le tableau suivant.

	B	$\bar{B}$	Total
C	0,24	0,06	0,3
$\bar{C}$	0,56	0,14	0,7
Total	0,8	0,2	1

Situation 2 : On demande à des personnes si elles mangent des légumes (L) et si elles sont en surpoids (S). On note les proportions dans le tableau suivant.

	L	$\bar{L}$	Total
S	0,18	0,12	0,3
$\bar{S}$	0,62	0,08	0,7
Total	0,8	0,2	1

1. La réalisation de B semble-t-elle, intuitivement, indépendante de celle de C ? En donner une explication possible.

2. Déterminer une relation entre $P(B)$, $P(C)$ et $P(B \cap C)$.

3. La réalisation de L semble-t-elle, intuitivement, indépendante de celle de S ? En donner une explication possible.

4. La relation de la question 2 reste-t-elle vraie avec $P(L)$, $P(S)$ et $P(L \cap S)$?

5. Les situations suivantes sont-elles des situations d'indépendance ? Essayer de répondre en utilisant un raisonnement intuitif puis en utilisant la relation conjecturée.

a. On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est 1 ; 4 ou 6 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

b. Dans un sac opaque on place 20 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 20. On en tire un au hasard. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est un multiple de 3 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

b. Dans un sac opaque on place 21 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 21. On en tire un au hasard. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est un multiple de 3 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

Définir une probabilité conditionnelle

Exercice 10. 1 (28 p 288)

On choisit un chien au hasard dans un élevage. On note L l'événement : « le chien choisi est un labrador » ; B l'événement : « le chien choisi est un berger allemand » et S l'événement : « le chien choisi est sevré ».



- Interpréter à l'aide de probabilités les informations suivantes :
 - 55 % des chiens de l'éleveur sont des labradors.
 - 36 % des chiens de l'éleveur sont des bergers allemands sevrés.
 - 64 % des labradors sont sevrés.
- À l'aide de pourcentages, traduire par une phrase les probabilités suivantes :
 - $P(B) = 0,8$
 - $P(B \cap \bar{S}) = 0,09$
 - $P_B(S) = 0,80$

Exercice 10. 2 (29 p 288)

Parmi ses salariés, une société compte 70 % d'employés commerciaux. 80 % d'entre eux possèdent une voiture de fonction. Alors que parmi les employés qui ne sont pas des commerciaux, seulement 10 % possèdent une voiture de fonction. On interroge au hasard un employé de la société. On considère les événements suivants :

- C : « L'employé interrogé est un commercial » ;
- V : « L'employé interrogé possède une voiture de fonction ».

- Déduire des informations de l'énoncé :
 - les probabilités $P(C)$ et $P(\bar{C})$;
 - les probabilités $P_C(V)$ et $P_{\bar{C}}(V)$.
- Définir par une phrase l'événement $C \cap V$; calculer la probabilité : $P(C \cap V)$.
 - Définir par une phrase l'événement $\bar{C} \cap V$; calculer la probabilité : $P(\bar{C} \cap V)$.

Exercice 10. 3 (40 p 289)

Une plateforme de jeux vidéo propose en téléchargement 9 600 titres différents dont certains sont gratuits. Les jeux sont rangés dans deux catégories : les jeux d'actions et les autres jeux. Le tableau suivant en donne la répartition.

	Jeux payants	Jeux gratuits	Total
Jeux d'action	1 728	1 104	2 832
Autres jeux	3 456	3 312	6 768
Total	5 184	4 416	9 600

On choisit au hasard un des jeux proposés par la plateforme.

- Déterminer la probabilité de l'événement A : « le jeu choisi est un jeu d'action ».
- Déterminer la probabilité de l'événement G : « le jeu choisi est un jeu gratuit ».
- Déterminer la probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action payant.
- Sachant que le jeu choisi est un jeu gratuit, déterminer la probabilité que ne soit pas un jeu d'action.

5. Le jeu choisi n'étant pas un jeu d'action, déterminer la probabilité que ce soit un jeu payant.

Exercice 10. 4 (42 p 289)

Des personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobayes pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. On a donné à certaines d'entre elles le médicament, les autres ont pris un placebo. On choisit au hasard une personne ayant participé à l'expérimentation et on considère les événements :

A : « la personne choisie a vu son état de santé s'améliorer »,
 M : « la personne choisie a été traitée avec le médicament »,
 P : « la personne choisie a été traitée avec un placebo ».

Les résultats de l'expérience sont donnés dans le tableau de probabilités suivant.

	A	$\bar{A}$	Total
M	51 %	16 %	67 %
P	5 %	28 %	33 %
Total	56 %	44 %	100 %

Si nécessaire, on arrondira les résultats à 0,01 près.

- Indiquer la signification des valeurs 5 % et 44 %.
- Déterminer $P_A(M)$.
- Déterminer la probabilité que la personne choisie n'ait pas vu son état de santé s'améliorer sachant qu'elle a pris le médicament.

Exercice 10. 5 (43 p 289)

Une étude sur les habitudes de consommation est réalisée auprès d'une population. Il en ressort que, dans la population, 57 % des personnes ont participé aux soldes d'hiver, 76 % des personnes ont participé aux soldes d'été et 42 % des personnes ont participé aux deux.

On interroge au hasard une personne de cette population. On considère les événements : H « la personne interrogée a participé aux soldes d'hiver » et E « la personne interrogée a participé aux soldes d'été ».

- Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableau des probabilités.
- Pourquoi est-il pertinent d'utiliser un tableau pour décrire cette expérience aléatoire ?

Exercice 10. 6 (Métropole, ST2S, 09.15)

La Caisse Primaire d'Assurance Maladie (CPAM) réalise une étude sur trois des principales affections de longue durée en répertoriant les patients selon la maladie qu'ils ont contractée et selon leur sexe. Les affections considérées sont : la leucémie lymphoïde, les anomalies de coagulation et les anomalies du tissu conjonctif. On admet qu'un patient étudié ne peut être atteint que d'une seule maladie. L'étude porte sur 65 955 patients, dont 26 703 hommes.

On observe 28 665 patients atteints d'une leucémie lymphoïde, et parmi ceux-ci, 54 % sont des hommes. Par ailleurs, 55 % des patients atteints d'anomalies de coagulation sont des femmes.

1. À l'aide des informations précédentes, compléter les cases grisées de la feuille de calcul donnée. (On arrondira les résultats à l'unité).

	A	B	C	D	E
1		Patients atteints de leucémie lymphoïde	Patients atteints d'anomalies de coagulation	Patients atteints d'anomalies du tissu conjonctif	Total
2	Homme			4 863	26 703
3	Femme				
4	Total	28 665	14 135	23 155	
5					
6					
7	Probabilités conditionnelles de chaque pathologie selon le sexe du patient				
8	Sachant que le patient est un homme :				
9		Leucémie lymphoïde	Anomalies de coagulation	Anomalies du tissu conjonctif	
10	Probabilité d'être atteint :	0,58	0,24	0,18	

(source : Améli.fr)

2. On choisit au hasard un patient parmi les 65955 ayant participé à l'étude. On considère les événements suivants :
 L : « Le patient est atteint de leucémie lymphoïde ».
 C : « Le patient est atteint d'anomalies de coagulation ».
 T : « Le patient est atteint d'anomalies du tissu conjonctif ».
 H : « Le patient est un homme ».

Dans la suite de cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

a. Calculer la probabilité de l'événement L , puis celle de l'événement H .

b. Décrire par une phrase l'événement $L \cap \bar{H}$, puis calculer sa probabilité.

c. Calculer la probabilité que le patient soit atteint de leucémie lymphoïde en sachant qu'il s'agit d'un homme.

d. Parmi les trois formules suivantes, choisir celle à entrer dans la cellule B10 de la feuille de calcul, de sorte que, recopiée vers la droite jusqu'à la cellule D10, elle permette d'afficher les probabilités conditionnelles de chaque affection dans le cas où le patient est un homme :

$$=B2/E2; \quad =B2/\$E\$2; \quad =B2/\$B\$4.$$

3. On choisit un patient parmi ceux atteints d'anomalies du tissu conjonctif. Calculer la probabilité que ce patient soit un homme.

Exercice 10. 7 (48 p 290)

Les trois principaux services de soins d'un centre hospitalier sont l'hématologie, la diabétologie et l'urologie. Les seringues utilisées sont fournies soit par le laboratoire Clamex, soit par le laboratoire Spara.

On choisit au hasard et de manière équiprobable un patient qui a eu une prise de sang dans l'un des trois services cités précédemment. On considère les événements suivants :

H : « la prise de sang a été effectuée dans le service hématologie » ;

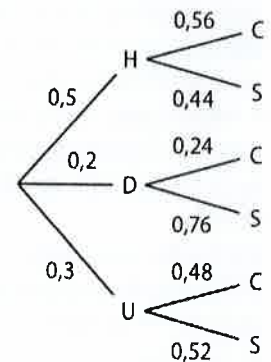
D : « la prise de sang a été effectuée dans le service diabétologie » ;

U : « la prise de sang a été effectuée dans le service urologie » ;

C : « la seringue utilisée a été fournie par le laboratoire Clamex » ;

S : « la seringue utilisée a été fournie par le laboratoire Spara ».

L'arbre ci-contre modélise la situation.



1. Indiquer la signification des nombres 0,2 et 0,48.

2. a. Quelle est la probabilité de l'événement H ?

b. Quelle est la probabilité que la seringue utilisée ait été fournie par le laboratoire Clamex, sachant qu'elle a été utilisée dans le service diabétologie ?

3. Calculer la probabilité de l'événement « le patient choisi a subi une prise de sang dans le service d'urologie avec une seringue fournie par le laboratoire Spara ».

Utiliser la formule des probabilités totales et un arbre pondéré

Exercice 10. 8 (56 p 292)

Les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter des voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique et on admet que :

- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

1. a. Déterminer la probabilité que le portique sonne.

b. Déterminer la probabilité d'avoir un « faux-positif », c'est-à-dire la probabilité que le passager ne porte pas d'objet métallique et que le portique sonne.

2. a. Si le portique sonne pour un passager, quelle est la pro-



bilité que ce passager porte un objet métallique ?

b. Quelle est la proportion de « faux positifs » parmi les passagers pour lesquels le portique a sonné ?

c. Commenter les résultats obtenus aux questions précédentes.

Exercice 10. 9 (68 p 294)

Romane se déplace à vélo ou en transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, elle se déplace en vélo 9 fois sur 10. Sinon, elle ne se déplace en vélo que 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p . Pour une journée donnée, on note :

- E l'événement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'événement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0,3p + 0,6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que



Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

- Calculer la valeur de p .
- Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Exercice 10. 10 (Nvle Calédonie ST2S 11.17)

Un test de dépistage d'une maladie a été élaboré par une entreprise pharmaceutique. Pour étudier sa fiabilité, on soumet à ce test une population comportant des personnes malades et des personnes saines.

On sait que dans la population testée :

- la proportion de personnes malades est de 85 % ;
- parmi les personnes malades, 95% ont un test positif ;
- parmi les personnes saines, 75% ont un test négatif.

On choisit au hasard une personne dans la population testée; on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

- M l'évènement : « la personne est malade » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

Dans cet exercice, la probabilité d'un évènement E est notée $p(E)$; la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé est notée $P_F(E)$; l'évènement contraire d'un évènement E est noté non E .

- Interpréter les données de l'énoncé pour déterminer les probabilités $p(M)$; $p_M(T)$ et $p_{\bar{M}}(\bar{T})$.
- Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- Exprimer par une phrase l'évènement $M \cap T$.
 - Calculer $p(M \cap T)$. En donner la valeur exacte.
- Montrer que $p(T) = 0,845$.
- On considère que le test de dépistage est fiable lorsque la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est supérieure ou égale à 0,95. Le test est-il fiable?

Exercice 10. 11 (Amérique du Nord, ES, 05.11)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux évènements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_A(B)$.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.

En France les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.

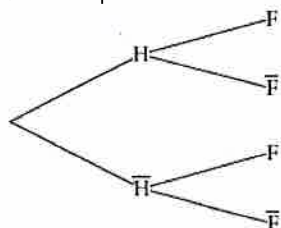
Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Partie A Étude de l'état d'asthme du couple

On note :

- H l'évènement : « L'homme est asthmatique »,
- F l'évènement : « La femme est asthmatique ».

- Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



- On note les évènements :

A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »

B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »

C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

Montrer que :

$$P(A) = 0,912 ; P(B) = 0,086 ; P(C) = 0,002.$$

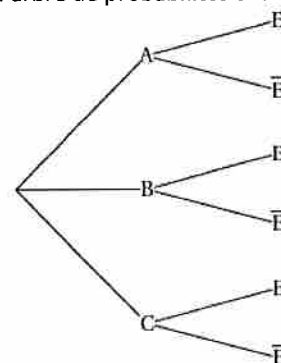
Partie B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'évènement : « Le premier enfant du couple est asthmatique »

- Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



- Montrer que $P(E) = 0,118$.
- Calculer $P_E(A)$ et interpréter le résultat. Déduire $P_E(\bar{A})$ et interpréter le résultat.
- Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ?

Exercice 10. 12 (Ploynésie, TS 06.11)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

- Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait gagné la première.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
- Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
- On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
 - Conjecturer le comportement de (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

- b. Proposer un algorithme donnant la valeur du premier entier n tel que $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.

Exercice 10. 13 (Antilles Guyane, TS 09.13)

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

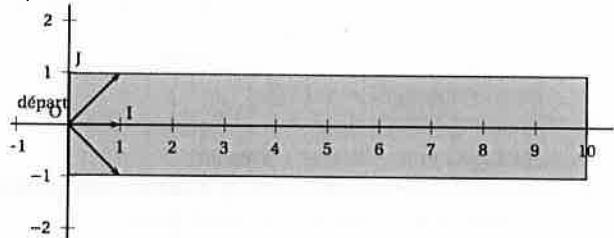
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S : « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0; 0)$ au début de la traversée. On note $(x; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ -1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
  
```

1. On donne les couples suivants : $(-1; 1)$; $(10; 0)$; $(2; 4)$; $(10; 2)$.

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

- A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 » ;
- B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 » ;
- C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n , b_n , c_n les probabilités respectives des évènements A_n , B_n et C_n .

1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre

$$0 \text{ et } 9, \text{ on a } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-dessous qui donne des valeurs approchées de a_n , b_n , c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

Caractériser l'indépendance

Exercice 10. 14 (57 p 292)

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair » ;
- B : « le nombre obtenu est un multiple de trois » ;
- C : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à trois ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Répondre à la même question pour les événements A et C, puis pour les événements B et C.

Exercice 10. 15 (58 p 292)

Une enquête a été effectuée sur le temps de parcours

quotidien entre le domicile et le lieu de travail des employés d'une entreprise composée de 3 services que l'on notera a , b et c . Les résultats sont dans le tableau ci-dessous :

Service	a	b	c	Total
Temps de trajet inférieur à 30 min	198	112	130	440
Temps de trajet supérieur à 30 min	252	138	170	560
Total	450	250	300	1000

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :

- A : « l'employé fait partie du service a » ;

B : « l'employé fait partie du service b » ;

C : « l'employé fait partie du service c » ;

M : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

1. Les événements A et M sont-ils indépendants ?
2. Les événements B et M sont-ils indépendants ?

Exercice 10. 16 (38 p 289)

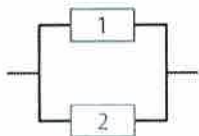
A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

1. La proposition « Si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\bar{A}$ et B sont eux aussi indépendants » est-elle vraie ?
2. Énoncer la contraposée de la proposition précédente. Cette contraposée est-elle vraie ?

Exercice 10. 17 (59 p 289)

Un circuit électronique intègre deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ». On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Exercice 10. 18 (62 p 289) Ca1, 2, 6

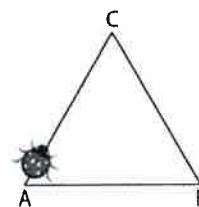
Lors d'un test de sélection, un QCM est proposé aux candidats. Ce QCM comporte deux questions qui ont chacune 3 réponses possibles parmi lesquelles une seule est juste. Un candidat répond au hasard à ce QCM.



1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau de probabilités
2. En déduire la probabilité pour que le candidat ait au moins une réponse juste.

Exercice 10. 19 (64 p 289) Ca1, 2, 6

Une coccinelle se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC. Elle part du sommet A puis vole vers un autre sommet. Son déplacement se fait 2 fois sur 3 dans le sens des aiguilles d'une montre et 1 fois sur 3 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



On s'intéresse aux deux premiers déplacements.

1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau de probabilités.
2. Quelle est la probabilité que la coccinelle soit revenue à son point de départ au bout des deux premiers déplacements ?

Exercice 10. 20 (Polynésie TS, 06.12) Ca1, 2, 4

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 80]$. Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$. Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 10. 21 (Réunion, TES, 06.11) Ca1, 2, 4, 6

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'internet un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale.

On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement internet.
- 1 740 élèves utilisent régulièrement internet.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée.

On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde »
- E l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première »

- T l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale »
- I l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet »

1. Compléter le tableau d'effectifs donné ci-dessous.

	2 nd	1 ^{ère}	Term	Total
Utilise internet régulièrement				
N'utilise pas internet régulièrement				
Total				

- Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement internet.
- Calculer $P_T(I)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
- Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas internet
- Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet.
Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\frac{21}{58}$.
- On choisit au hasard, successivement et avec remise, trois questionnaires. Quelle est la probabilité que, parmi les trois questionnaires, un exactement soit celui d'un élève utilisateur régulier d'internet ? On en donnera la valeur arrondie au millièmes.

Exercice 10. 22 (Métropole, TES, 06.11) Ca1, 2, 4, 6

Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que:

- 12 % des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20 % ont un défaut dans la forme,
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8 % présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la couleur » et $\bar{C}$ l'évènement contraire.

On appelle F l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la forme » et $\bar{F}$ l'évènement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme.

b. Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme.

c. Les événements C et F sont-ils indépendants ? Justifier.

3. Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut.

Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.

4. Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel.

L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.

Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut ?
Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Exercice 10. 23 (Métropole, ST2S, 06.17) Ca1, 2, 4, 6

La corpulence est mesurée à partir de l'indice de masse corporelle (IMC) qui est égal au rapport entre la masse (en kilogramme) et le carré de la taille (en mètre). Les individus dont l'IMC est supérieur à 30 sont considérés comme obèses.

On a réalisé en 2006 une étude à l'aide de questionnaires sur une population d'individus âgés de 21 à 59 ans.

Partie A.

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des femmes interrogées.

On note E l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne ayant un emploi ».

On note O l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne considérée comme obèse ».

Selon les données de 2006, on sait que :

- l'effectif total des femmes interrogées est de 2685, dont 1920 ont un emploi ;
- 10,6% des femmes interrogées sont considérées comme obèses ;
- parmi les femmes considérées comme non obèses, 72,7% ont un emploi.

1. On arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

a. Justifier que le nombre total de femmes considérées comme obèses est égal à 285 et que les femmes considérées comme non obèses et ayant un emploi sont au nombre de 1745.

b. Compléter le tableau suivant.

	Obèse	Non obèse	Total
Ayant un emploi	175	1745	1920
N'ayant pas d'emploi	110	655	765
Total	285	2400	2685

2. Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millièmes.

a. Calculer la probabilité de l'évènement E .

b. Calculer la probabilité de l'évènement O .

c. Décrire par une phrase l'évènement $E \cap O$ et calculer la probabilité de cet événement.

d. Justifier que les événements E et O ne sont pas indépendants.

3. Étude de l'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des femmes en 2006 (les probabilités seront arrondies au millièmes).

a. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi corresponde à une femme ayant un emploi sachant qu'elle est considérée comme obèse.

b. Déterminer la probabilité $P_{\bar{O}}(E)$.

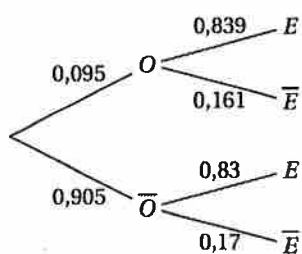
c. En considérant les résultats précédents, que peut-on dire de l'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des femmes en 2006 ?

Partie B

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des hommes interrogés.

On reprend les mêmes notations pour les événements que dans la partie A.

On admet que les probabilités associées à cette expérience aléatoire sont représentées à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :



1. Par lecture de l'arbre, donner la probabilité qu'un homme ait un emploi sachant qu'il est considéré comme non obèse.

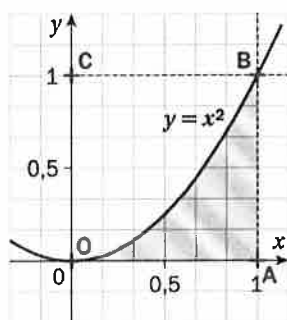
2. Le rapport d'étude conclut qu'il n'y a pas d'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des hommes en 2006. Comment peut-on le justifier à l'aide de l'arbre précédent ?

Exercice 10. 24 (Hatier 110 p 308) A1

On a représenté ci-contre un carré OABC et la fonction carré. On a hachuré la partie du carré située sous la parabole.

1. On prend au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré OABC, d'aire une unité.

a. À quel intervalle appartiennent les nombres réels x et y ?



b. Quelle condition doivent vérifier x et y pour que le point M soit situé dans la partie hachurée ?

2. On souhaite estimer l'aire de la partie hachurée. Pour y parvenir, on prend au hasard 1 000 points dans le carré OABC et on détermine la proportion des points appartenant à la partie hachurée.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer cette proportion P .

```

1  C ← 0
2  Pour k allant de 1 à ...
3      x ← un nombre réel compris entre ...
4      y ← un nombre réel compris entre ...
5      SI ... alors C ← C + 1
6      Fin SI
7  Fin Pour
8  P ← ...

```

b. Programmer l'algorithme et donner une estimation de l'aire de la partie hachurée.

c. Comment obtenir une meilleure estimation ?

3. On considère le quart de disque de centre O et de rayon 1, situé dans le carré OABC, noté D .

a. Quelle est l'aire du quart de disque D ?

b. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Recopier et compléter la phrase :

« Un point $M(x; y)$ appartient au quart de disque D si et seulement si $x^2 + y^2 \dots 1$. »

c. Rédiger un algorithme qui permet d'obtenir une estimation du nombre π .

11 Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire associée à un univers fini sur lequel on a défini une loi de probabilité P .

Définition 11. 1*variable aléatoire*

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω qui à chaque élément de Ω associe un nombre réel.
Définir une variable aléatoire consiste donc à associer un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Remarque

- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est fini. On parle de variable aléatoire discrète.
 - Si $x_1, \dots, x_n$ sont les valeurs prises par X , on note :
 - $\{X = x_i\}$ l'événement « X prend la valeur x_i », c'est à dire l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i par X ;
 - $\{X \geq x_i\}$ l'événement « X prend une valeur supérieure ou égale à x_i », c'est à dire l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x_i .
- On définit de manière analogue les événements $\{X > x_i\}$, $\{X \leq x_i\}$ et $\{X < x_i\}$.

Exemple 11. 1

1. Un restaurant propose trois menus dont les prix respectifs sont 10 €, 12 € et 18 €. Il y a actuellement 100 clients dans le restaurant.
 - a. On choisit un client au hasard et on lui demande le prix de son menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?
 - b. On choisit un menu au hasard et on s'intéresse au nombre de clients ayant choisi ce menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?
2. Une urne contient 12 boules bleues, 2 boules vertes et 6 boules rouges, indiscernables au toucher. Le joueur mise 5 € puis il tire une boule au hasard. Si la boule est verte il gagne 3 €, si elle est rouge il gagne 15 €, si elle est bleue il ne gagne rien.
On note X le gain algébrique d'un joueur à l'issue d'un tirage.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Quelle(s) issue(s) réalise(nt) l'événement $\{X = 10\}$? Même question pour $\{X < 0\}$.

Définition 11. 2 *$P(X = x_i)$, loi de probabilité d'une VAD*

- La probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ est la somme des probabilités des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i .
- Définir la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Remarque

On représente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

Exemple 11. 2

- Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie.
On gagne 5 € à chaque fois qu'on obtient pile, on perd 2€ à chaque fois qu'on obtient face.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain (éventuellement négatif) obtenu à la fin.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 2. Déterminer la loi de probabilité de X .
 3. En déduire $P(X \leq 3)$ puis $P(X > 3)$.

Dans cette partie X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	...	p_n

Définition 11.3*espérance*

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Remarque

- Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X . L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X peut donc s'interpréter comme le résultat moyen d'une expérience aléatoire sur un grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire.
- L'espérance mathématique $E(X)$ permet de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard. On dit que le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, favorable au joueur lorsque $E(X) > 0$ et défavorable lorsque $E(X) < 0$.

Exemple 11.3

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : une boule rouge, trois boules vertes et six boules bleues. Un jeu consiste à tirer une boule dans l'urne. Une boule de couleur rouge rapporte 10 €, une boule de couleur bleue fait perdre 1 € et une boule de couleur verte ne fait rien perdre ni gagner.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

Définition 11.4*variance, écart-type*

- La variance de la variable aléatoire X le nombre réel, noté $V(X)$, donné par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(x))^2 + p_2 (x_2 - E(x))^2 \dots + p_n (x_n - E(x))^2.$$

- L'écart type de la variable aléatoire X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, donné par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque

- Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , l'écart type de la série statistique que l'on obtient se rapproche de l'écart type de X .
- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion : plus il est faible plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance, plus il est grand plus elles tendent à être dispersées autour de l'espérance.
- L'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ ont la même unité que les valeurs x_i .

Exemple 11.4

Soit X la variable aléatoire donnée dans l'exemple précédent.
Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Propriété 11.1

Soient a et b deux réels.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

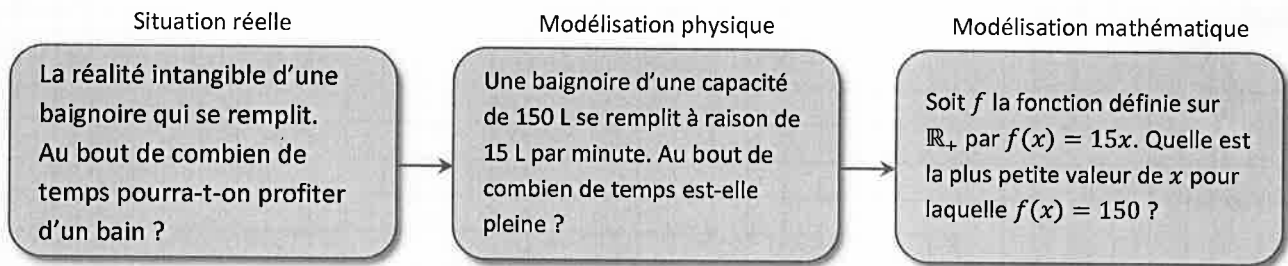
Formule de König : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

linéarité de l'espérance

Exemple 11.5

Les règles du jeu de l'exemple 11.3 changent : on mise 2 € et on multiplie le gain algébrique par 3.
On appelle Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique de ce nouveau jeu.
Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ puis comparer les deux jeux.

Modéliser une situation, c'est l'exprimer de manière simple dans un cadre qui permet le raisonnement. La modélisation est le nom que l'on donne à la fois au fait de modéliser et au résultat de cette action. Les mathématiques sont un cadre qui permet le raisonnement et une modélisation mathématique est une modélisation dans ce cadre. Une situation peut-être modélisée de multiples façons différentes. La modélisation en tant que résultat est, elle-même, une situation qui peut être modélisée à son tour. On peut ainsi opérer plusieurs modélisations de manière successives à partir d'une seule situation initiale. Voici un exemple de deux modélisations successives d'une situation réelle dont la dernière étape est une modélisation mathématique.



Dans le cadre mathématique on résout l'équation $f(x) = 150$ et on trouve $x = 10$. On conclut que la baignoire sera pleine au bout de 10 minutes en repassant à la modélisation physique. On peut alors conclure qu'on pourra profiter du bain dans une dizaine de minutes.

Exemple 11.5:

$$\begin{array}{l|l} R: 1 \rightarrow 10 \text{ €} & 28 \text{ €} \\ V: 3 \rightarrow 0 \text{ €} & -2 \text{ €} \\ B: 6 \rightarrow -1 & -5 \text{ €} \end{array}$$

y_i	-5	-2	28
$P(Y=y_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Y) = -5 \times \frac{5}{10} - 2 \times \frac{3}{10} + 28 \times \frac{1}{10} =$$

ou $Y = 3X - 2$ on a $E(Y) = 3E(X) - 2 = 3 \times \frac{2}{5} - 2 = -\frac{4}{5}$

$$\sigma(Y) = |a| \sigma(X) = 3 \times \sqrt{\frac{281}{25}}$$

les gains du deuxième sont plus dispersés que le premier.

Simuler une variable aléatoire avec Python

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Répéter 10 fois, 100 fois, 10 000 fois une expérience aléatoire par simulation, cela se fait très facilement avec Python. Nous pourrions ainsi observer le « comportement » du hasard sur un grand nombre de répétitions d'épreuves aléatoires.

Partie B. Un exemple

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un 6 et qui vaut 0 si on n'obtient pas un 6. Nous allons simuler 1 000 répétitions de ce jeu et enregistrer les 1 000 valeurs prises par X dans une liste.

1. Simulation de la variable aléatoire

La bibliothèque `random` donne accès à la commande `randint(1,6)` qui renvoie un entier aléatoire entre 1 et 6. C'est une simulation d'un lancer de dé équilibré. On peut alors obtenir la valeur x de X correspondante à l'aide d'une affectation conditionnelle, comme l'indique le programme ci-contre :

```
1 from random import randint
2 x= 1 if randint(1,6)==6 else 0
3 print(x)
```

2. Simulation de 1 000 répétitions

a. Analyser le programme Python ci-contre et expliquer pourquoi il permet de simuler 1 000 lancers de dé équilibré.

```
1 from random import randint
2 L=[1 if randint(1,6)==6 else 0 for k in range(1000)]
```

b. À votre avis, quelle devrait être la fréquence d'apparition du 1 dans la liste L ?

Application 1

Faire une simulation, sur 1 000 lancers de dé, de la variable aléatoire indiquant le gain au jeu suivant : on lance un dé, si le résultat du lancer est un nombre pair i , on gagne i euros, si c'est un nombre impair j , on perd $2(j-1)$ euros.

INDICATION

En Python, l'instruction `if x%2==0` permet de savoir si x est divisible par 2.

Application 2

On effectue 20 tirages successifs d'une boule au hasard avec remise dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires. On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de boules rouges obtenues.

Expliquer pourquoi le programme ci-contre permet de simuler une telle expérience.

```
1 from random import randint
2 print(sum([1 if randint(1,10)<7 else 0 for k in range(20)]))
```

Application 3

On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1[$. X est la variable aléatoire qui vaut 3 si $x^2 < 0,5$ et qui vaut -3 si $x^2 \geq 0,5$.

1. Écrire un programme avec Python qui simule cette variable aléatoire X .

2. En déterminant l'ensemble des solutions de $x^2 < 0,5$ sur $[0 ; 1[$, démontrer que $P(X = 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Nous avons vu, dans l'expérimentation 1, des exemples de simulation d'une variable aléatoire avec Python. Si on répète 1 000 fois une telle simulation, on obtient un échantillon de taille 1 000. C'est-à-dire que l'on peut obtenir une liste de 1 000 valeurs x_i .

Rappelons que la moyenne m d'un tel échantillon est alors donnée par la formule $m = \frac{\sum x_i}{1000}$.

Partie B. Un exemple

Une précision : si une liste ne contient que des nombres, l'instruction `sum(L)` permet d'obtenir la somme des termes de la liste.

On appelle S la variable aléatoire égale à la somme des faces obtenues quand on lance trois dés équilibrés.

1. Expliquer pourquoi le programme suivant permet d'afficher 1 000 simulations de S :

```
1 from random import randint
2 S=[randint(1,6)+randint(1,6)+randint(1,6) for k in range(1000)]
3 print(S)
```

2.a. Que permet d'obtenir le programme ci-contre ?

b. Calculer la moyenne d'un échantillon de taille 1 000 de S .

```
4 def m(S):
5     return sum(S)/len(S)
```

Application 1

On appelle S la variable aléatoire égale à la somme des faces obtenues quand on lance deux dés équilibrés.

1. Écrire un programme Python qui permet d'afficher 10 000 simulations de S .
2. Calculer la moyenne de cet échantillon.
3. Écrire un programme Python qui crée un échantillon de taille n de S , valable pour tout entier naturel n non nul.

Application 2

On tire quatre cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cartes « cœur » obtenues.

1. Simuler la variable aléatoire X à l'aide d'un programme Python.
2. Obtenir un échantillon de X de taille 10 000.
3. Calculer la moyenne de cet échantillon.

Application 3

1. Expliquer ce que réalise le programme Python suivant :

```
1 from random import random
2 X=[1 if random() $\leq$ 0.5 else 0 for k in range(1000)]
3 print(sum(X)/1000)
```

RAPPEL

L'instruction `random()` renvoie un nombre réel aléatoire de $[0 ; 1[$.

2. Lancer le programme et indiquer la valeur obtenue.

REMARQUE

On pourra constater que la valeur obtenue est proche de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.