

MATHÉMATIQUES



Entre 0 et 1 : marron
Entre 1 et 2 : rouge
Entre 2 et 3 : bleu
Entre 3 et 4 : rose
Entre 4 et 5 : vert
Entre 5 et 6 : jaune

Proportions et pourcentages

1. Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes (décimale, fractionnaire, pourcentage) p 2
2. Utiliser une proportion pour calculer une partie connaissant le tout, ou le tout connaissant une partie p 5

Evolutions et variations

3. Passer d'une formulation additive (« augmenter de 5 % », respectivement « diminuer de 5 % ») à une formulation multiplicative (« multiplier par 1,05 », respectivement « multiplier par 0,95 ») p 8
4. Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale p 10
5. Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage p 12
6. Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives p 14
7. Calculer un taux d'évolution réciproque p 17

1

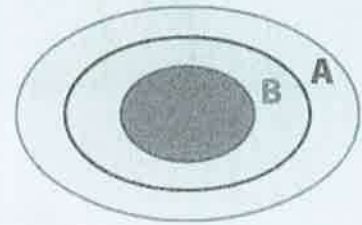
Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes (décimale, fractionnaire pourcentage)

Rappel

- Calculer $t\%$ d'un nombre c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$
- On considère un ensemble A et un sous-ensemble B de A. La proportion de B dans A est le nombre

$$p = \frac{\text{nombre d'éléments de B}}{\text{nombre d'éléments de A}}$$

Elle peut être donnée en %, sous forme décimale ou sous forme de fraction irréductible.



Pour bien démarrer

01 En vous inspirant de l'exemple suivant, mettre sous forme de fraction irréductible les différentes proportions proposées.

Exemple :

$$0,12 = \frac{0,12}{1} = \frac{0,12 \times 100}{1 \times 100} = \frac{12}{100} = \frac{4 \times 3}{4 \times 25} = \frac{3}{25}$$

a. $0,48 = \frac{48}{100} = \frac{48 \times 100}{1 \times 100} = \frac{4800}{100} = \frac{12}{25}$

b. $0,72 = \frac{72}{100} = \frac{72 \times 100}{1 \times 100} = \frac{7200}{100} = \frac{18}{25}$

c. $0,225 = \frac{225}{1000} = \frac{225 \times 1000}{1 \times 1000} = \frac{225000}{1000} = \frac{9}{40}$

d. $0,7 = \frac{70}{100} = \frac{70 \times 100}{1 \times 100} = \frac{7000}{100} = \frac{7}{10}$

02 En vous inspirant de l'exemple suivant, mettre sous forme décimale les différentes proportions proposées.

Exemple :

$$17\% = \frac{17}{100} = 0,17$$

a. $67\% = \frac{67}{100} = 0,67$

b. $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

c. $100\% = \frac{100}{100} = 1$

d. $0,93\% = \frac{93}{100} = 0,93$

Pas à pas

03 Calculer 25 % de 560 c'est multiplier 560 par : $\frac{25}{100}$
Soit, $\frac{25}{100} \times 560 = 140$

04 Calculer 5 % de 240 c'est multiplier 240 par : $\frac{5}{100}$
Soit, $\frac{5}{100} \times 240 = 12$

05 Calculer 60 % de 150 c'est multiplier 150 par : $\frac{60}{100}$
Soit, $\frac{60}{100} \times 150 = 90$

06 Dans un club de 250 adhérents, 40 personnes jouent au tennis.

a. La proportion des joueurs de tennis de ce club, écrite sous forme d'une fraction irréductible est :

$$p = \frac{40}{250} = \frac{4 \times 10}{25 \times 10} = \frac{4}{25}$$

b. Ecrire p sous forme décimale.

$$p = \frac{4}{25} = 0,16$$

c. Ecrire p en pourcentage.

$$p = 0,16 \times 100 = 16\%$$

07 Dans une classe de 32 élèves de Terminale 24 ont eu leur Bac avec mention.

a. La proportion des mentions dans cette classe, écrite sous forme d'une fraction irréductible est :

$$p = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

b. Ecrire p sous forme décimale.

$$p = \frac{3}{4} = 0,75$$

c. Ecrire p en pourcentage.

$$p = 0,75 \times 100 = 75\%$$

08 Sur 150 contrôles de vitesse la police nationale a verbalisé 60 conducteurs.

a. La proportion des conducteurs verbalisés, écrite sous forme d'une fraction irréductible est :

$$p = \frac{60}{150} = \frac{6 \times 10}{15 \times 10} = \frac{6}{15} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{2}{5}$$

b. Ecrire p sous forme décimale.

$$p = \frac{2}{5} = 0,4$$

c. Ecrire p en pourcentage.

$$p = 0,4 \times 100 = 40\%$$

Pour s'exercer

09 Sur 900 personnes interrogées, 150 se disent vouloir voter pour le candidat A. Dans cet échantillon, donner la proportion, sous forme de fraction irréductible des personnes votant pour le candidat A.

$$p = \frac{150}{900} = \frac{15 \times 10}{90 \times 10} = \frac{15}{90} = \frac{5 \times 3}{3 \times 30} = \frac{5}{30} = \frac{1 \times 5}{6 \times 5} = \frac{1}{6}$$

10 Julien gagne 2 100 € par mois. Il consacre 40 % de son salaire à son loyer. Quel est le montant de son loyer ?

$$\frac{40}{100} \times 2100 = 840 \text{ €}$$

11 6 élèves sur 30 ont eu mention très bien au baccalauréat dans une classe. Quelle proportion cela représente-t-il dans cette classe ? (Exprimer cette proportion sous forme décimale).

12 Un groupe de 35 élèves comprend 60 % de filles. Combien y a-t-il de filles dans ce groupe ?

$$\frac{60}{100} \times 35 = 21$$

13 Une entreprise a expédié le mois dernier 1 800 colis dont 450 vers l'étranger. Quelle est la part des colis envoyés vers l'étranger le mois dernier dans cette entreprise ? Exprimer cette proportion en pourcentage.

14 Nassim a repéré le même téléviseur dans deux boutiques différentes.

Dans la première, il coûte 399 € et bénéficie d'une remise de 20 % et dans la seconde, il coûte 450 € et bénéficie d'une remise de 25 %.

Dans quelle boutique, le téléviseur sera-t-il le moins cher après la remise consentie ?

15 Calculer 17,5 % de 300.

16 Calculer 21 % de 150.

17 Calculer 37 % de 500.

$$\frac{37}{100} \times 500 = 185$$

18 Calculer 15 % de 34.

19 Dans mon entreprise de 500 salariés, il y a 19 % de cadres. Parmi ces cadres, il y a 50 femmes.

a. Déterminer le nombre de cadres dans l'entreprise.

b. Déterminer la proportion de femmes parmi les cadres. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

20 Dans un lycée de 1 600 élèves 440 sont en Terminale. 80 % de ces élèves font du sport toutes les semaines.

a. Déterminer le nombre d'élèves de Terminale pratiquant du sport toutes les semaines.

$$\frac{80}{100} \times 440 = 352$$

b. Déterminer la proportion d'élèves de Terminale faisant du sport toutes les semaines parmi l'ensemble des élèves du lycée. Donner le résultat sous forme de fraction irréductible puis sous forme décimale.

$$\frac{352}{1600} = \frac{2 \times 176}{2 \times 800} = \frac{2 \times 88}{2 \times 400} = \frac{2 \times 44}{2 \times 200} = \frac{2 \times 22}{2 \times 100} = \frac{11}{50}$$

9/22

241 Dans ma commune de 26 000 habitants, il y a 30 % de personnes de 25 ans ou moins.

Parmi ces jeunes de 25 ans ou moins, 65 % sont scolarisés.

a. Déterminer le nombre de personnes de 25 ans ou moins dans ma commune.

$$\frac{30}{100} \times 26000 = 7800$$

b. Déterminer le nombre de personnes de moins de 25 ans scolarisées dans ma commune.

$$\frac{65}{100} \times 7800 = 5070$$

c. Déterminer la proportion de personnes de moins de 25 ans scolarisées par rapport à l'ensemble des habitants de la commune. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible puis sous forme décimale.

$$\frac{5070}{26000} = \frac{507 \times 10}{260 \times 100} = \frac{507}{2600} = \frac{13 \times 39}{13 \times 200} = \frac{39}{200}$$

2

Utiliser une proportion pour calculer une partie connaissant le tout, ou le tout connaissant une partie.

Rappel

La proportion de B dans A est nombre $p = \frac{\text{nombre d'éléments de B}}{\text{nombre d'éléments de A}} = \frac{\text{partie}}{\text{tout}}$. Alors :

- Lorsqu'on connaît une **proportion** (ou un pourcentage) et le **tout**, on peut calculer la **partie** en effectuant :

$$\text{partie} = \text{proportion} \times \text{tout}$$

- Inversement, si l'on connaît une **partie** et la **proportion** qu'elle représente, on peut calculer le **tout** avec :

$$\text{tout} = \frac{\text{partie}}{\text{proportion}}$$

Pour bien démarrer

01 En s'inspirant de l'exemple suivant isoler et calculer b .

Exemple : $0,2 = \frac{b}{180} \Leftrightarrow b = 0,2 \times 180$

$$b = 0,2 \times 180 = \frac{2}{100} \times 180 = \frac{2 \times 180}{100} = \frac{360}{100} = 3,6$$

a. $0,3 = \frac{b}{243} \Leftrightarrow b = 0,3 \times 243$

$$b = 0,3 \times 243 = \frac{3}{10} \times 243 = \frac{3 \times 243}{10} = \frac{729}{10} = 72,9$$

b. $0,75 = \frac{b}{80} \Leftrightarrow b = 0,75 \times 80$

$$b = 0,75 \times 80 = \frac{75}{100} \times 80 = \frac{75 \times 80}{100} = \frac{6000}{100} = 60$$

c. $0,4 = \frac{b}{150} \Leftrightarrow b =$

$$b = 0,4 \times 150 = \frac{4}{10} \times 150 = \frac{4 \times 150}{10} = \frac{600}{10} = 60$$

02 En s'inspirant de l'exemple suivant isoler et calculer a .

Exemple : $0,03 = \frac{120}{a} \Leftrightarrow a = \frac{120}{0,03}$

$$a = \frac{120 \times 100}{0,03 \times 100} = \frac{12\,000}{3} = \frac{3 \times 4000}{3} = 4000$$

a. $0,4 = \frac{60}{a} \Leftrightarrow a = \frac{60}{0,4}$

$$a = \frac{60 \times 10}{0,4 \times 10} = \frac{600}{4} = 150$$

b. $0,25 = \frac{45}{a} \Leftrightarrow a = \frac{45}{0,25}$

$$a = \frac{45 \times 100}{0,25 \times 100} = \frac{4500}{25} = 180$$

c. $0,6 = \frac{54}{a} \Leftrightarrow a =$

$$a = \frac{54 \times 100}{0,6 \times 100} = \frac{5400}{60} = 90$$

03 En s'inspirant de l'exemple suivant isoler et calculer b .

Exemple : $\frac{2}{5} = \frac{b}{200} \Leftrightarrow b = \frac{2 \times 200}{5}$

$$b = \frac{2 \times 200}{5} = \frac{2 \times 5 \times 40}{5} = 80$$

a. $\frac{3}{4} = \frac{b}{160} \Leftrightarrow b =$

$$b = \frac{3 \times 160}{4} = 120$$

b. $\frac{2}{3} = \frac{b}{120} \Leftrightarrow b =$

$$b = \frac{2 \times 120}{3} = 80$$

c. $\frac{5}{8} = \frac{b}{44} \Leftrightarrow b =$

$$b = \frac{5 \times 44}{8} = 27,5$$

04 En s'inspirant de l'exemple suivant isoler et calculer a .

Exemple : $\frac{3}{5} = \frac{120}{a} \Leftrightarrow a = \frac{120 \times 5}{3}$

$$a = \frac{120 \times 5}{3} = \frac{3 \times 40 \times 5}{3} = 40 \times 5 = 200$$

a. $\frac{2}{3} = \frac{80}{a} \Leftrightarrow a =$

$$a = \frac{80 \times 3}{2} = 120$$

b. $\frac{5}{8} = \frac{150}{a} \Leftrightarrow a =$

$$a = \frac{150 \times 8}{5} = 240$$

c. $\frac{4}{7} = \frac{30}{a} \Leftrightarrow a =$

$$a = \frac{30 \times 7}{4} = 52,5$$

Pas à pas

05 Dans une ville de 2 000 habitants, 35 % sont âgés de plus de 60 ans. On se propose de calculer le nombre d'habitants de plus de 60 ans de cette ville.

a. Cherche-t-on une **partie** ou le **tout** ?

b. Dans la formule $\text{proportion} = \frac{\text{partie}}{\text{tout}}$ isoler l'inconnue cherchée.

c. En déduire la valeur cherchée.

06 Une entreprise compte un certain nombre de salariés. 84 d'entre eux sont cadres, soit 12% de l'effectif total. On se propose de déterminer le nombre de salariés de l'entreprise.

a. Cherche-t-on une **partie** ou le **tout** ?

b. Dans la formule $\text{proportion} = \frac{\text{partie}}{\text{tout}}$ isoler l'inconnue cherchée.

c. En déduire la valeur cherchée.

07 Un magasin applique une réduction de $\frac{1}{5}$ sur un article qui coûte 180 €. On cherche le montant de la réduction.

a. Cherche-t-on une **partie** ou le **tout** ?

b. Dans la formule $\text{proportion} = \frac{\text{partie}}{\text{tout}}$ isoler l'inconnue cherchée.

c. En déduire la valeur cherchée.

08 Dans une classe, 18 élèves participent à une activité, soit $\frac{2}{5}$ de la classe. On cherche le nombre d'élèves de la classe.

a. Cherche-t-on une **partie** ou le **tout** ?

b. Dans la formule $\text{proportion} = \frac{\text{partie}}{\text{tout}}$ isoler l'inconnue cherchée.

c. En déduire la valeur cherchée.

Pour s'exercer

09 Calculer 35% de 240.

10 Une entreprise vend 1 200 produits. 25% sont exportés à l'étranger. Combien cela représente-t-il de produits ?

11 72 représente 40% d'un nombre. Quel est ce nombre ?

12 Une élève a obtenu 18 points à un devoir, ce qui correspond à 60% du total. Quelle était la note maximale possible ?

13 Calculer les $\frac{3}{4}$ de 150.

14 Un tarif étudiant représente les $\frac{3}{4}$ du tarif normal, qui est de 80 €. Quel est le montant à payer avec cette réduction ?

15 90 correspond aux $\frac{3}{4}$ d'un total. Quel est ce total ?

16 Un coureur a parcouru les $\frac{3}{4}$ de son parcours, soit 210 km. Quelle est la longueur totale du parcours ?

17 Un élève a obtenu $\frac{3}{4}$ des points à une épreuve notée sur 80.

a. Combien de points a-t-il obtenus ?

b. Quel pourcentage du total cela représente-t-il ?

18 Le budget mensuel d'un foyer est de 2 500 €.

a. 30 % sont consacrés au logement. Quel est le montant consacré au logement ?

b. Les dépenses alimentaires représentent 625 €. Quelle proportion du budget cela représente-t

19 Une entreprise a versé 18 000 € à un sous-traitant, ce qui correspond à 30 % du coût total du chantier.

a. Quel est le coût total du chantier ?

b. Quel est le montant restant à payer ?

20 Lors d'un marathon, 480 coureurs ont terminé la course. Cela correspond aux $\frac{2}{3}$ des inscrits.

a. Combien de personnes s'étaient inscrites au départ ?

b. Combien de personnes n'ont pas terminé la course ?

c. Quelle proportion (sous forme fractionnaire simplifiée) des coureurs n'a pas terminé la course ?

21 Une association compte 120 membres. Lors d'une assemblée, seuls 96 étaient présents.

a. Quelle proportion des membres étaient présents ?

Donner la réponse :

- sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{96}{120} =$$

- sous forme décimale :

- en pourcentage :

b. $\frac{1}{3}$ des absents avaient prévenu. Combien de membres ont été absents sans prévenir ?

3

Passer d'une formulation additive (« augmenter de 5 % », respectivement « diminuer de 5 % ») à une formulation multiplicative (« multiplier par 1,05 », respectivement « multiplier par 0,95 »).

Rappel

Augmenter ou diminuer une quantité d'un taux t revient à la multiplier par :

$$C = 1 + t$$

(avec $t > 0$ dans le cas d'une hausse et $t < 0$ dans le cas d'une baisse).

Remarques :

- C est appelé **coefficient multiplicateur** associé à t .
- Un taux est souvent exprimé en pourcentage. Dans les calculs il faut alors bien penser à l'écrire sous forme fractionnaire ou décimale. Par exemple, pour une hausse de 4 % on a $C = 1 + \frac{4}{100} = 1,04$. Pour une baisse de 3 % on a $C = 1 + \left(-\frac{3}{100}\right) = 1 - \frac{3}{100} = 0,97$.
- Lorsque $C > 1$ alors l'évolution est une hausse sinon c'est une baisse.

Pas à pas

01 On considère une hausse de 30 %. On cherche le coefficient multiplicateur associé.

a. Quelle est la valeur du taux t ? 30

b. Donner alors le coefficient multiplicateur associé :

$$C = 1 + \frac{30}{100} = 1,3$$

02 On considère une baisse de 20 %. On cherche le coefficient multiplicateur associé.

a. Quelle est la valeur du taux t ? 20

b. Donner alors le coefficient multiplicateur associé :

$$C = 1 + \left(-\frac{20}{100}\right) = 0,8$$

03 On considère une hausse de 300 %. On cherche le coefficient multiplicateur associé.

a. Quelle est la valeur du taux t ? 300

b. Donner alors le coefficient multiplicateur associé :

$$C = 1 + \frac{300}{100} = 4$$

04 On considère une baisse de 4 %. On cherche le coefficient multiplicateur associé.

a. Quelle est la valeur du taux t ? 4

b. Donner alors le coefficient multiplicateur associé :

$$C = 1 + \left(-\frac{4}{100}\right) = 0,96$$

Pour s'exercer

05 Un prix est augmenté de 50 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + t = 1 + \frac{50}{100} = 1,5$$

06 Un prix est augmenté de 100 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + t = 1 + \frac{100}{100} = 2$$

07 Un prix est diminué de 70 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + t = 1 + \left(-\frac{70}{100}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$$

08 Un prix est augmenté de 22 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + \frac{22}{100} = 1,22$$

09 Un prix est diminué de 50 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + \left(-\frac{50}{100}\right) = 1 - 0,5 = 0,5$$

10 Un prix est augmenté de 100 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$C = 1 + \frac{100}{100} = 2$$

11 Un prix est augmenté de 200 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

12 Un prix est diminué de 5 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

13 Un prix est augmenté de 5 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

14 Augmenter un prix de 200 % revient à multiplier ce prix par :

$$C = 1 + k = 1 + \frac{200}{100} = 3$$

15 Diminuer un prix de 95 % revient à multiplier ce prix par :

16 Augmenter un prix de 7 % revient à multiplier ce prix par :

17 Diminuer un prix de 12 % revient à multiplier ce prix par :

$$C = 1 + k = 1 + \left(-\frac{12}{100}\right) = 1 - 0,12 = 0,88$$

18 Augmenter un prix de 19 % revient à multiplier ce prix par :

19 Diminuer un prix de 46 % revient à multiplier ce prix par :

20 Augmenter un prix de 21,5 % revient à multiplier ce prix par :

21 Diminuer un prix de 32,5 % revient à multiplier ce prix par :

22 Augmenter un prix de 1,6 % revient à multiplier ce prix par :

23 Diminuer un prix de 3,4 % revient à multiplier ce prix par :

24 Augmenter un prix de 1 % revient à multiplier ce prix par :

$$C = 1 + k = 1 + \frac{1}{100} = 1 + 0,01 = 1,01$$

4

Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale.

Rappel

On utilisera le schéma suivant :



Où C correspond au coefficient multiplicateur associé à une évolution de taux t .

Pour bien démarrer

01 L'opération qui permet de trouver V_A est :

$$25 \times 1,3 = V_A \Rightarrow V_A = 32,5$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times 1,3} & \\
 25 \text{ €} & & V_A \\
 & \xleftarrow{+ 1,3} &
 \end{array}$$

02 L'opération qui permet de trouver V_D est :

$$\frac{39}{1,3} = V_D \Rightarrow V_D = 30$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times 1,3} & \\
 V_D & & 39 \text{ €} \\
 & \xleftarrow{+ 1,3} &
 \end{array}$$

03 On sait qu'un article qui coûte 18 € est augmenté de 30 %. Dans le schéma ci-dessous, placer correctement le 18 € :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times 1,3} & \\
 18 & & \\
 & \xleftarrow{+ 1,3} &
 \end{array}$$

04 Après une hausse de 20 %, un article coûte 18 €. Dans le schéma ci-dessous, placer correctement le 18 € :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times 1,2} & 18 \\
 & \xleftarrow{+ 1,2} &
 \end{array}$$

05 Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 40 % est $C = 1 + \frac{40}{100} = 1,4$

06 Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % est $C = 1 + \frac{(-15)}{100} = 0,85$

07 Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 25 % est $C = 1 + \frac{(-25)}{100} = 0,75$

08 Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 10 % est $C = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$

Pas à pas

09 Un article coûte 180 € et subit une baisse de 30 %. On veut connaître son nouveau prix.

a. Le coefficient multiplicateur C associé à cette baisse est $C = 1 + \frac{(-30)}{100} = 1 - 0,3 = 0,7$

b. Compléter alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times 0,7} & \\
 180 & & 126 \\
 & \xleftarrow{+ 0,7} &
 \end{array}$$

c. La bonne opération pour calculer le nouveau prix est :

$$180 \times 0,7$$

d. En effectuant cette opération on trouve que le nouveau prix est 126

10 Un article coûte 70 € et subit une hausse de 20 %. On veut connaître son nouveau prix.

a. Le coefficient multiplicateur C associé à cette hausse est $C = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$

b. Compléter alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\times \dots} & \\
 & \xleftarrow{+ \dots} &
 \end{array}$$

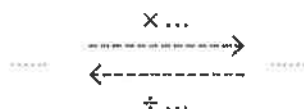
c. La bonne opération pour calculer le nouveau prix est :

d. En effectuant cette opération on trouve que le nouveau prix est

11 Après une hausse de 200 %, un article coûte 180 €. On veut connaître son ancien prix.

a. Le coefficient multiplicateur C associé à cette baisse est $C =$

b. Compléter alors le schéma suivant :



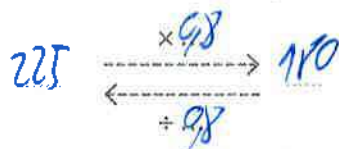
c. La bonne opération pour calculer le nouveau prix est :

d. En effectuant cette opération on trouve que le nouveau prix est

12 Après une baisse de 20 %, un article coûte 180 €. On veut connaître son ancien prix.

a. Le coefficient multiplicateur C associé à cette baisse est $C = 1 + t = 1 + (-\frac{20}{100}) = 1 - 0,2 = 0,8$

b. Compléter alors le schéma suivant :



c. La bonne opération pour calculer le nouveau prix est : $\frac{180}{0,8}$

d. En effectuant cette opération on trouve que le nouveau prix est 225

Pour s'exercer

13 Une plante mesure 120 cm. Elle grandit de 10 % en une semaine. Quelle est sa nouvelle hauteur ?

$$C = 1 + t = 1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$$

$$120 \times 1,1 = 132 \text{ cm}$$

14 Une population de papillons est de 80 individus. Elle augmente de 300 % après une période de reproduction. Quelle est la nouvelle population ?

15 Après une baisse de 80 %, une réserve d'eau contient 24 litres. Quelle était sa quantité initiale ?

16 Après une baisse de 25 %, un stock de livres contient 90 unités. Quelle était la quantité initiale ?

17 Un sac de pommes contient 40 fruits. On ajoute 30 % de pommes supplémentaires. Combien y en a-t-il maintenant ?

18 Après une hausse de 10 %, une distance parcourue est de 72 km. Quelle était la distance initiale ?

19 Un article coûte 50 € et subit une baisse de 15 %. Donner son nouveau prix ?

20 Après une hausse de 70 %, une production atteint 107 unités. Quelle était la production initiale ?

21 Après une hausse de 2 %, une masse atteint 153 kg. Quelle était la masse initiale ?

$$C = 1 + t = 1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$$

$$\frac{153}{1,02} = 150 \text{ kg}$$

5

Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage.

Rappel

On considère une quantité qui varie de V_D (valeur de départ) à V_A (valeur d'arrivée).

Le taux d'évolution qui permet de passer de V_D à V_A est :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

Remarque : pour obtenir un taux d'évolution en % il suffit de multiplier le résultat de $\frac{V_A - V_D}{V_D}$ par 100.

Pas à pas

01. Un article est soldé. Son prix passe de 50 € à 42 €. On veut connaître l'évolution en pourcentage.

a. Ici $V_A = 42$
et $V_D = 50$

b. Nous avons $t = \frac{42 - 50}{50} = -0,16$

c. t est : ☒ négatif ☐ positif

donc l'évolution est une : ☒ une baisse ☐ une hausse
de : 15 %

02. Un litre de lait bio passe de 2 € à 2,30 €. On veut connaître l'évolution en pourcentage.

a. Ici $V_A = 2,30$
et $V_D = 2$

b. Nous avons $t = \frac{2,30 - 2}{2} = 0,15$

c. t est : ☐ négatif ☒ positif

donc l'évolution est une : ☐ une baisse ☒ une hausse
de : 15 %

03. Mes impôts locaux passent de 800 € à 920 €. On veut connaître l'évolution en pourcentage.

a. Ici $V_A = 920$
et $V_D = 800$

b. Nous avons $t = \frac{920 - 800}{800} = 0,15$

c. t est : ☐ négatif ☒ positif

donc l'évolution est une : ☐ une baisse ☒ une hausse
de : 15 %

04. Un garagiste fait un geste commercial : la facture de 900 € passe à 855 €. On veut connaître l'évolution en pourcentage.

a. Ici $V_A = 855$
et $V_D = 900$

b. Nous avons $t = \frac{855 - 900}{900} = -0,05$

c. t est : ☒ négatif ☐ positif

donc l'évolution est une : ☒ une baisse ☐ une hausse
de : 5 %

Pour s'exercer

05. La population de la France est passée en quelques années de 60 millions d'habitants à 66 millions d'habitants. Quel est le pourcentage de hausse associé ?

$$V_D = 60 \quad V_A = 66 \quad t = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{66 - 60}{60} = 0,1$$

$$0,1 \times 100 = 10\%$$

06. La bouteille de jus d'orange bio qui coûte habituellement 3 € est au prix de 2,10 € aujourd'hui. Quel est en pourcentage le montant de la remise ?

07. Il y a deux ans, une voiture coûtait 15 000 €. Aujourd'hui, son prix est de 12 000 €. De quel pourcentage a-t-il baissé ?

08 En 5 ans, la baguette de pain d'un boulanger est passée de 0,80 € à 1,10 €. De quel pourcentage le prix de la baguette a-t-il augmenté en 5 ans ?

09 J'ai acheté il y a 15 ans mon appartement à 90 000 euros. Je viens de le revendre 170 000 €. Donner le taux d'évolution du prix de mon appartement sur ces 15 ans sous la forme d'une fraction irréductible.

10 J'ai acheté il y a 5 ans un vélo au prix de 210 €. Je viens de le revendre d'occasion au prix de 70 €. De quel pourcentage mon vélo a-t-il baissé en 5 ans ? Donner le résultat arrondi à 0,1 près.

$$V_A = 210$$

$$V_D = 70$$

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{70 - 210}{210} = -0,7$$

$$-0,7 \times 100 = -70\%$$

11 L'indice de performance d'une entreprise est passé de 110 à 115,5. Quelle est l'évolution en pourcentage de l'indice de performance de cette entreprise ?

12 On considère une suite u . On sait que $u_1 = 25$ et que $u_2 = 27$. Quel est le taux d'évolution entre u_1 et u_2 ?

$$u_1 = 25$$

$$u_2 = 27$$

$$t = \frac{u_2 - u_1}{u_1} = \frac{27 - 25}{25} = 0,08$$

$$0,08 \times 100 = 8\%$$

13 On considère une suite v . On sait que $v_0 = 12,5$ et que $v_1 = 10$. Quel est le taux d'évolution entre v_0 et v_1 ?

14 Le chiffre d'affaires d'une entreprise est passé en un an de 120 000 € à 102 000 €. Quelle est l'évolution en pourcentage du chiffre d'affaires de cette entreprise sur la dernière année ?

15 Devant une demande en baisse, une entreprise est passée de 80 000 composants électroniques produits par jour à 75 000. Quelle est l'évolution du nombre de composants électroniques produits par jour de cette entreprise ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible et d'un pourcentage.

$$V_A = 75000$$

$$V_D = 80000$$

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{75000 - 80000}{80000} = -0,0625$$

$$-0,0625 \times 100 = -6,25\%$$

16 En 1700, la population mondiale était estimée à 650 millions d'individus. Aujourd'hui, elle est estimée à 7 milliards d'individus. Quelle est l'évolution exprimée en pourcentage du nombre d'individus sur Terre depuis l'année 1700 ?

$$7 \text{ milliards} = 7000 \text{ millions}$$

$$\frac{7000 - 650}{650} = 9,8$$

$$9,8 \times 100 = 980\%$$

6

Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives.

Rappel

On considère n évolutions successives de taux $t_1, t_2, \dots, t_n$

Pour calculer le taux d'évolution global on procède ainsi :

1. On calcule pour chaque taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ le coefficient multiplicateur associé $C_1, C_2, \dots, C_n$ en utilisant les formules :

$$C_i = 1 + t_i$$

2. On calcule le **coefficient global** C_G en utilisant la formule :

$$C_G = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$$

3. On calcule le taux global t_G en utilisant la formule :

$$t_G = C_G - 1$$

Pour bien démarrer

- 01 Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de

7 % est $C = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$

- 02 Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de

7 % est $C = 1 + \left(-\frac{7}{100}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$

- 03 Le coefficient multiplicateur associé à une évolution est 1,32. Calculer le taux en pourcentage de cette évolution.

$t = 1,32 - 1 = 0,32 \times 100 = 32\%$

- 04 Le coefficient multiplicateur associé à une évolution est 1,07. Calculer le taux en pourcentage de cette évolution.

$t = 1,07 - 1 = 0,07 \times 100 = 7\%$

- 05 Le coefficient multiplicateur associé à une évolution est 0,9. Calculer le taux en pourcentage de cette évolution.

$t = 0,9 - 1 = -0,1 = -10\%$

- 06 Le coefficient multiplicateur associé à une évolution est 0,98. Calculer le taux en pourcentage de cette évolution.

$t = 0,98 - 1 = -0,02 \times 100 = -2\%$

Pas à pas

- 07 La première année, le cours d'une action a augmenté de 50 %. L'année suivante, le cours de cette action a

augmenté de 20 %. On s'intéresse au taux d'évolution global noté t_G sur l'ensemble des deux années.

- a. Coefficient multiplicateur associé à la première évolution :

$C_1 = 1 + t_1 = 1 + \frac{50}{100} = 1 + 0,5 = 1,5$

Coefficient multiplicateur associé à la deuxième année :

$C_2 = 1 + t_2 = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,2 = 1,2$

- b. Le coefficient multiplicateur C_G associé à la hausse globale est :

$C_G = C_1 \times C_2 = 1,5 \times 1,2 = 1,8$

- c. Le taux global associé à ces deux évolutions est alors :

$t_G = C_G - 1 = 1,8 - 1 = 0,8 = 80\%$

- 08 Le prix d'un vaccin a augmenté de 10 % une année. L'année suivante, le prix de ce vaccin a diminué de 40 %. On s'intéresse au taux d'évolution global noté t_G sur l'ensemble de ces deux années.

- a. Coefficient multiplicateur associé à ces deux évolutions :

$C_1 = 1 + t_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$

$C_2 = 1 + t_2 = 1 + \left(-\frac{40}{100}\right) = 1 - 0,4 = 0,6$

- b. Le coefficient multiplicateur C_G associé à l'évolution globale est :

$C_G = C_1 \times C_2 = 1,1 \times 0,6 = 0,66$

- c. Le taux global associé à ces deux évolutions est alors :

$t_G = C_G - 1 = 0,66 - 1 = -0,34 = -34\%$

- 09 La taxe d'habitation d'une ville a diminué trois années de suite. La première année, elle a diminué de 10 %. La

deuxième année, elle a diminué de 20 %. Et la troisième année, elle a diminué de 30 %. On veut connaître la baisse globale due à la taxe d'habitation sur l'ensemble des trois années.

a. Coefficient multiplicateur associé à ces trois évolutions :

$$C_1 = 1 + t_1 = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$C_2 = 1 + t_2 = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$C_3 = 1 + t_3 = 1 - 0,3 = 0,7$$

b. Le coefficient multiplicateur C_G associé à la baisse globale est :

$$C_G = C_1 \times C_2 \times C_3 = 0,9 \times 0,8 \times 0,7 = 0,504$$

c. Le taux global associé à ces trois évolutions est alors :

$$t_G = C_G - 1 = 0,504 - 1 = -0,496 = -49,6 \%$$

Pour s'exercer

10. Le coût de fabrication d'un smartphone a baissé de 30 % puis de 20 %. Quel est le taux d'évolution global suite à ces deux baisses ?

$$C_1 = 1 - 0,3 = 0,7 \quad C_2 = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

$$C_2 = 1 - 0,2 = 0,8 \quad t_G = 0,56 - 1 = -0,44 = -44 \%$$

11. Le coût de fabrication d'un bureau a baissé de 30 % puis augmenté de 30 %. Quel est le taux d'évolution global suite à ces deux évolutions ?

12. Les auteurs d'un ouvrage ont subi une baisse de revenu de 20 %, suivie d'une baisse de revenu de 30 %, suivie d'une hausse de revenu de 50 %. Quel est le taux d'évolution global des revenus des auteurs suite à ces trois évolutions ?

$$C_1 = 1 - 0,2 = 0,8 \quad C_2 = 0,8 \times 0,7 = 0,56$$

$$C_2 = 1 - 0,3 = 0,7 \quad C_3 = 0,56 \times 1,5 = 0,84$$

$$C_3 = 1 + 0,5 = 1,5 \quad t_G = 0,84 - 1 = -0,16 = -16 \%$$

13. Le PIB d'un pays a augmenté successivement de 5 % puis de 9 %. Quel est le taux d'évolution global suite à ces deux hausses ?

14. Une quantité subit une hausse de 7 %, suivie d'une hausse de 20 %. Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

15. Une quantité subit une hausse de 7 % suivie d'une baisse de 20 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

16. Une quantité subit une baisse de 7 % suivie d'une baisse de 20 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

17. Une quantité subit une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 10 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

$$C_1 = 1 + 0,1 = 1,1 \quad C_2 = 1,1 \times 1,1 = 1,21$$

$$C_2 = 1 + 0,1 = 1,1 \quad t_G = 1,21 - 1 = 0,21 = 21 \%$$

18. Une quantité subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

19. Une quantité subit une baisse de 10 % suivie d'une baisse de 10 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

20. Une quantité subit une hausse de 40 % suivie d'une hausse de 50 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

21. Une quantité subit une hausse de 40 % suivie d'une baisse de 50 %.

Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

$$C_1 = 1 + 0,4 = 1,4 \quad C_2 = 1,4 \times 0,5 = 0,7$$

$$C_2 = 1 - 0,5 = 0,5 \quad t_G = 0,7 - 1 = -0,3 = -30 \%$$

22 Une quantité subit une baisse de 40 % suivie d'une baisse de 40 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

23 Une quantité subit une hausse de 50 % suivie d'une hausse de 50 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

24 Une quantité subit une hausse de 50 % suivie d'une baisse de 50 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

25 Une quantité subit une baisse de 50 % suivie d'une baisse de 50 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

$$C_1 = 1 - 0,5 = 0,5 \quad C_2 = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$C_g = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

$$t_g = 0,25 - 1 = -0,75 = -75\%$$

26 Une quantité subit une baisse de 25 % suivie d'une hausse de 10 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

27 Une quantité subit une baisse de 25 % suivie d'une baisse de 10 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

28 Une quantité subit une hausse de 25 % suivie d'une baisse de 10 %.
Quelle est l'évolution globale suite à ces deux évolutions ?

$$C_1 = 1 + 0,25 = 1,25 \quad C_2 = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$C_g = 1,25 \times 0,9 = 1,125$$

$$t_g = 1,125 - 1 = 0,125 = 12,5\%$$

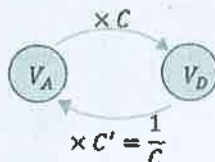
7

Calculer un taux d'évolution réciproque.

Rappel

Exemple : Lorsqu'un article passe de 20 € à 25 € il augmente de 25 %. Le **taux réciproque** est le taux à appliquer à 25 € pour retrouver le prix initial de 20 €.

Comment calculer ce taux réciproque t' ?



Méthode 1 : lorsqu'on connaît uniquement l'évolution t

1. On calcule le coefficient multiplicateur C associé à l'évolution de taux t , en appliquant la formule $C = 1 + t$.

2. On calcule le coefficient multiplicateur C' associé au taux réciproque cherché t' en utilisant la formule :

$$C' = \frac{1}{C}$$

3. On calcule le taux réciproque t' en utilisant la formule $t' = C' - 1$.

Méthode 2 : lorsqu'on connaît la valeur de départ V_D et la valeur d'arrivée V_A

Le taux réciproque est le taux faisant passer de V_D à V_A . On applique donc la formule $\frac{V_A - V_D}{V_D}$ en y inversant les valeurs V_D et V_A .

Pour bien démarrer

01 On a $0,6 = \frac{6}{10}$. Alors :

$$0,6 \times C = 1 \Leftrightarrow \frac{6}{10} \times C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Résoudre de la même manière les équations suivantes :

a. $1,7 \times C = 1$

$$\frac{17}{10} \times C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{10}{17}$$

b. $0,2 \times C = 1$

$$\frac{2}{10} \times C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{10}{2} = 5$$

c. $3,5 \times C = 1$

$$\frac{35}{10} \times C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

02 Une quantité passe de 12 € à 15 €. Quel est le taux d'évolution associé ?

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{15 - 12}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

03 Une quantité passe de 25 € à 22,5 €. Quel est le taux d'évolution associé ?

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{22,5 - 25}{25} = \frac{-2,5}{25} = -0,1 = -10\%$$

Pas à pas

04 Calculer un taux réciproque avec la méthode 1

On veut déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 25 %.

a. **Etape 1 :** Le coefficient multiplicateur associé à cette hausse est

$$C = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$$

b. **Etape 2 :** On a $C \times C' = 1$ donc $1,25 \times C' = 1$.

Résoudre cette équation en vous inspirant de l'exercice 1.

Mettre C' sous forme décimale.

$$C' = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

c. **Etape 3 :** On a $t' = C' - 1$. Calculer t' , donner le résultat en %.

$$t' = 0,8 - 1 = -0,2 \times 100 = -20\%$$

05 Calculer le taux réciproque avec la méthode 2

On veut déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 25 %.

a. Si une quantité coûte 100 € elle coutera après une hausse de 25 % : 125 €.

$$100 \times 1,25 = 125$$

b. Le taux réciproque correspond alors au taux d'évolution permettant de passer de $V_D = 125$ € à $V_A = 100$ € est :

$$t' = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{100 - 125}{125} = \frac{-25}{125} = \frac{-25 \times 1}{125 \times 1} = \frac{-25}{125} = -0,2 = -20\%$$

06 Calculer un taux réciproque avec la méthode 1 (bis) :

On veut déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 60 %.

a. Etape 1 : Le coefficient multiplicateur associé à cette hausse est

$$C = 1 + \left(\frac{-60}{100} \right) = 0,4$$

b. Etape 2 : On a $C \times C' = 1$ donc $0,4 \times C' = 1$.

Résoudre cette équation en vous inspirant de l'exercice 1.

Mettre C' sous forme décimale.

$$\frac{4}{10} \times C' = 1 \quad (\Rightarrow) \quad C' = \frac{10}{4} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

c. Etape 3 : On a $t' = C' - 1$. Calculer t' , donner le résultat en %.

$$t' = 2,5 - 1 = 1,5 \times 100 = 150\%$$

07 Calculer le taux réciproque avec la méthode 2 (bis)

On veut déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 60 %.

a. Si une quantité coûte 100 € elle coulera après une baisse de 60 % : 40 €.

b. Le taux réciproque correspond alors au taux d'évolution permettant de passer de $V_D = 40$ € à $V_A = 100$ € est :

$$t' = \frac{100 - 40}{40} = 1,5 \times 100 = 150\%$$

Pour s'exercer

08 Déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 150 %.

$$C = 1 + 1,5 = 2,5 \quad 2,5 \times C' = 1$$

$$t = 0,4 - 1 = -0,6 \quad \frac{2,5}{10} \times C' = 1 \quad (\Rightarrow) \quad C' = \frac{10}{2,5} = \frac{10 \times 2}{2,5 \times 2} = \frac{20}{5} = 4$$

09 Déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 50 %. Donner ce taux sous forme fractionnaire.

10 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 80 %.

11 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 20 %.

12 Déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 30 %. Donner le résultat sous forme fractionnaire.

13 Déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 100 %.

14 Déterminer le taux réciproque associé à une hausse de 200 %.

15 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 25 %.

$$C = 1 - 0,25 = 0,75 \quad 0,75 \times C' = 1$$

$$\frac{75}{100} \times C' = 1 \quad (\Rightarrow) \quad C' = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$$

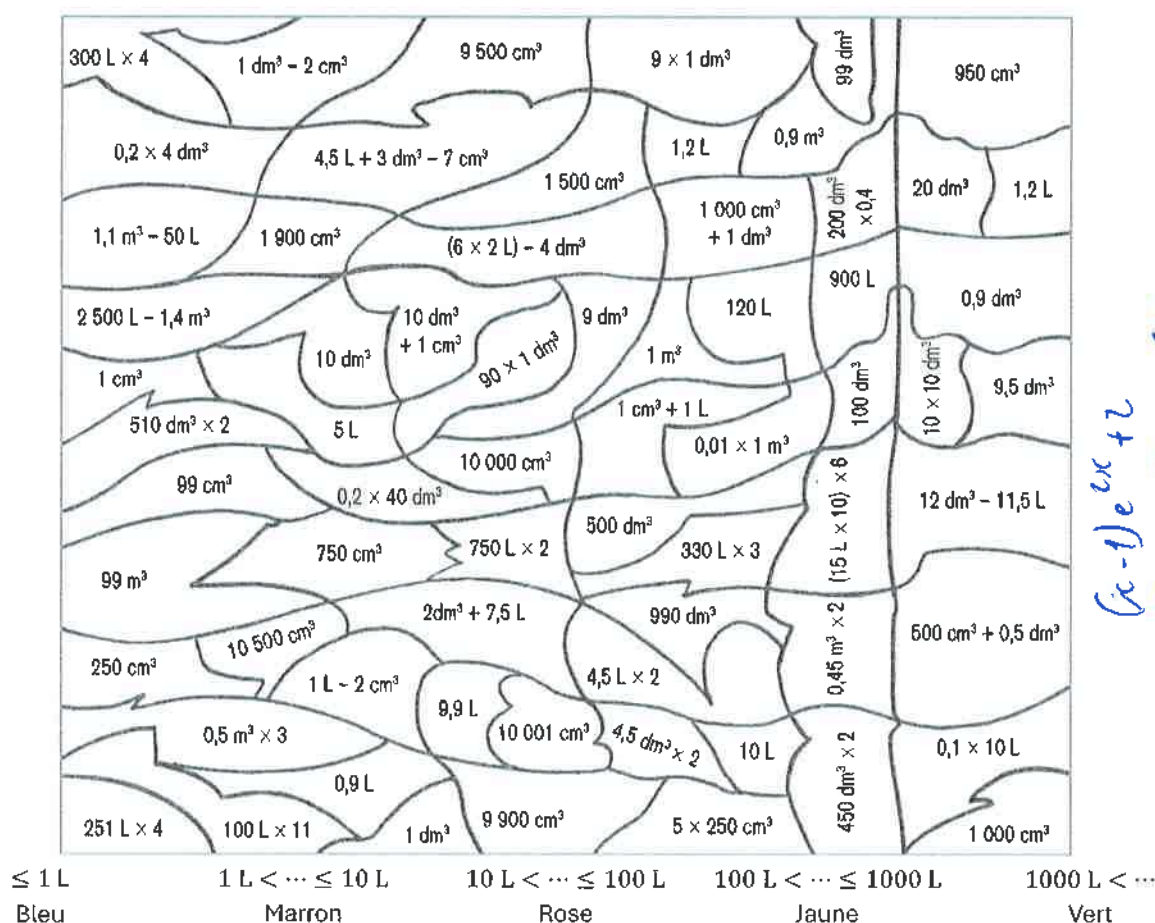
16 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 30 %.

17 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 95 %.

18 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 40 %.

19 Déterminer le taux réciproque associé à une baisse de 50 %.

MATHÉMATIQUES



Mètre cube	Décimètre cube			Centimètre cube			Millimètre cube		
m³	dm³			cm³			mm³		
	hectolitre	décalitre	litre	déclitre	centilitre	millilitre			
	hℓ	daℓ	ℓ	dℓ	cl	ml			

Calculs numériques et algébriques

8. Comparer deux nombres directement ou par calcul : de leur différence ; s'ils sont strictement positifs, de leur quotient.
9. Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples
10. Effectuer des opérations sur les puissances
11. Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, pourcentage)
12. Estimer un ordre de grandeur
13. S'assurer de la vraisemblance, de la cohérence d'un résultat.
14. Effectuer des conversions d'unités : longueurs, aires, volumes, contenances, durées, vitesses, masses.

8

Comparer deux nombres directement ou par calcul : de leur différence ; s'ils sont strictement positifs, de leur quotient.

Rappel

Pour comparer deux nombres, on peut :

Lire directement leur position sur la droite numérique (ex : $340 < 350$ car 350 est plus à droite que 340).



Calculer leur différence $a - b$:

- Si le résultat est **positif**, alors $a > b$
- Si le résultat est **nul**, alors $a = b$
- Si le résultat est **néglatif**, alors $a < b$

Si les deux nombres sont **strictement positifs**, on peut aussi comparer leur **quotient** $\frac{a}{b}$:

- Si $\frac{a}{b} > 1$ alors $a > b$
- Si $\frac{a}{b} = 1$ alors $a = b$
- Si $\frac{a}{b} < 1$ alors $a < b$

Pas à pas

01 Calculez les différences entre les deux nombres proposés. Indiquez si le premier est plus grand, égal ou plus petit que le second.

Exemple : $5,2 - 3,9 = 1,3 \Rightarrow 3,9 < 5,2$

- a. $4,1 - 2,6 = \dots \Rightarrow \dots < \dots$
- b. $-3,5 - (-4,1) = \dots \Rightarrow \dots < \dots$
- c. $-1,2 - 0,8 = \dots \Rightarrow \dots < \dots$
- d. $0,3 - (-0,5) = \dots \Rightarrow \dots < \dots$

02 Effectuez les divisions suivantes (sans calculatrice) et comparez les deux nombres **strictement positifs**.

Exemple : $\frac{3,5}{1,4} = \frac{35}{14} = \frac{7 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{2} = 2,5 > 1 \Rightarrow 3,5 > 1,4$

- a. $\frac{0,12}{0,15} = \dots = \dots$
 $\dots \Rightarrow \dots < \dots$
- b. $\frac{2,1}{3} = \dots = \dots$
 $\dots \Rightarrow \dots < \dots$
- c. $\frac{0,12}{0,15} = \dots = \dots$
 $\dots \Rightarrow \dots < \dots$
- d. $\frac{0,12}{0,15} = \dots = \dots$
 $\dots \Rightarrow \dots < \dots$

Pour s'exercer

03 Comparer les deux nombres suivants en calculant une différence :

a. 7,2 et 6,8

$$7,2 - 6,8 = 0,4$$

b. -2 et -3

$$-2 - (-3) = -2 + 3 = 1$$

c. 0,5 et -0,5

$$0,5 - (-0,5) = 0,5 + 0,5 = 1,0$$

d. -1,3 et -2,7

04 Comparer les deux nombres suivants en calculant un quotient.

a. 4,5 et 3

b. 2 et 5

c. 5 et 6

d. 0,4 et 0,8

05 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $0,9 < 0,89$ ☐ vrai ☐ faux

2. $-1,5 > -1,2$ ☐ vrai ☐ faux

3. $0,9 < 0,89$ ☐ vrai ☐ faux

4. $1 = 1,000$ ☐ vrai ☐ faux

5. $\frac{1}{3} = 0,3$ ☐ vrai ☐ faux

6. $0,75 < 0,750$ ☐ vrai ☐ faux

7. $-3,4 < -3,405$ ☐ vrai ☐ faux

06 Comparer les deux nombres suivants par calcul de leur différence :

a. 12,4 et 9,6

b. -7,5 et -7,2

c. 3 et -3

d. 0 et -0,1

07 Trier les nombres suivant dans l'ordre croissant :

3,4 ; 2,9 ; -1 ; 0 ; -2,7

08 Trier les nombres suivant dans l'ordre décroissant :

5 ; 4,99 ; 5,01 ; 0 ; -0,01

09 Compléter avec $<$, $=$ ou $>$.

a. 4,8  4,81

b. -3,2  -3,19

c. 7  6,999

d. 0,25  $\frac{1}{4}$

e. $\frac{2}{5}$ 0,6

Rappel

Soient a, b, c, d et k des réels avec b, d et k non nuls.

- Pour **additionner** (ou **soustraire**) des fractions ayant le même dénominateur il suffit d'additionner (ou soustraire) les numérateurs et de conserver le dénominateur commun :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

NB : Pour additionner ou soustraire des fractions il faut d'abord les réduire au même dénominateur.

- Pour **multiplier** deux fractions il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

- **Diviser** par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

- Une fraction ne change pas si on multiplie (ou divise) le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

NB : Cette égalité permet de **simplifier** des fractions ou de **mettre au même dénominateur** pour pouvoir faire des additions.

- Si deux fractions ont même dénominateur positif elles sont rangées dans l'ordre croissant de leur numérateur. Autrement dit, si $b > 0$ alors :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a < c$$

NB : Cette propriété permet de **comparer** des fractions.

- Pour **comparer** des fractions ayant même dénominateur positif on peut utiliser le produit en croix. Si b et d sont positifs :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

Pour bien démarrer

01 En s'inspirant de l'exemple suivant, rendre les fractions proposées irréductibles.

Exemple : $\frac{154}{98} = \frac{154 \div 2}{98 \div 2} = \frac{77}{49} = \frac{77 \div 7}{49 \div 7} = \frac{11}{7}$

a. $\frac{240}{126} = \frac{240 \div \dots}{126 \div \dots} = \frac{120}{63}$
 $= \frac{120 \div \dots}{63 \div \dots} = \dots$

b. $\frac{525}{200} = \frac{525 \div \dots}{200 \div \dots} = \frac{105}{40}$
 $= \frac{105 \div \dots}{40 \div \dots} = \dots$

c. $\frac{63}{42} = \dots$
 $\dots$

d. $\frac{420}{990} = \dots$
 $\dots$

e. $\frac{224}{756} = \dots\dots\dots$

Pas à pas

02 En s'inspirant de l'exemple calculer les différentes sommes proposées. Ecrire le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exemple : $\frac{7}{12} + \frac{11}{12} = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{18 \div 6}{12 \div 6} = \frac{3}{2}$

a. $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{\quad}{4} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

b. $\frac{7}{4} + \frac{8}{4} = \frac{\quad}{4} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

c. $\frac{1}{100} + \frac{19}{100} = \frac{\quad}{100} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

03 En s'inspirant de l'exemple calculer les différentes sommes proposées. Ecrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemple : $\frac{5}{7} + \frac{9}{16} = \frac{5 \times 16}{7 \times 16} + \frac{9 \times 7}{16 \times 7} = \frac{80}{112} + \frac{63}{112} = \frac{143}{112}$

a. $\frac{9}{4} + \frac{11}{5} = \frac{9 \times \quad}{4 \times \quad} + \frac{11 \times \quad}{5 \times \quad} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

b. $\frac{2}{7} + \frac{88}{35} = \frac{2 \times \quad}{7 \times \quad} + \frac{88 \times \quad}{35 \times \quad} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

c. $\frac{3}{5} + \frac{11}{12} = \frac{3 \times \quad}{5 \times \quad} + \frac{11 \times \quad}{12 \times \quad} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

04 En s'inspirant de l'exemple calculer les différents produits proposés. Ecrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemple : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$

a. $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

b. $\frac{13}{14} \times \frac{15}{16} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

c. $\frac{9}{10} \times \frac{11}{12} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

05 En s'inspirant de l'exemple calculer les différents produits proposés. Ecrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemple : $\frac{2}{11} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{11} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{77}$

a. $\frac{1}{7} \div \frac{6}{5} = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

b. $\frac{1}{7} \div \frac{6}{5} = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

c. $\frac{9}{10} \div \frac{3}{8} = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

06 En s'inspirant de l'exemple comparer les fractions suivantes.

Exemple : $\frac{5}{7}$ et $\frac{19}{7}$. Les fractions ont même dénominateur

positif : 7 et $5 < 19$ donc $\frac{5}{7} < \frac{19}{7}$.

a. $\frac{150}{19}$ et $\frac{25}{19}$. Les fractions ont même dénominateur

positif : et 150 25 donc $\frac{150}{19}$ $\frac{25}{19}$.

b. $\frac{21}{34}$ et $\frac{77}{34}$. Les fractions ont même dénominateur positif :

..... et 21 77 donc $\frac{21}{34}$ $\frac{77}{34}$.

07 En s'inspirant de l'exemple comparer les fractions suivantes.

Exemple : $-\frac{3}{10}$ et $-\frac{7}{10}$.

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer $\frac{-3}{10}$ et $\frac{-7}{10}$.

Les fractions ont même dénominateur positif : 10.

On compare alors les numérateurs :

$-3 > -7$ donc $-\frac{3}{10} > -\frac{7}{10}$.

a. $-\frac{5}{9}$ et $-\frac{11}{9}$.

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer et

Les fractions ont même dénominateur positif :

On compare alors les numérateurs :

..... donc

b. $-\frac{65}{27}$ et $-\frac{151}{27}$.

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer et

Les fractions ont même dénominateur positif :

On compare alors les numérateurs :

..... donc

08 En s'inspirant de l'exemple comparer les fractions positives suivantes.

Exemple : $\frac{2}{5}$ et $\frac{11}{14}$

On calcule les produits $2 \times 14 = 28$ et $5 \times 11 = 55$.

On compare les produits : $28 < 55$ donc $\frac{2}{5} < \frac{11}{14}$.

a. $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{8}$

On calcule les produits $\times$ = ... et $\times$ = ...

On compare les produits : donc

b. $\frac{2}{7}$ et $\frac{7}{29}$

On calcule les produits $\times$ = ... et $\times$ = ...

On compare les produits : donc

09 En s'inspirant de l'exemple comparer les fractions positives suivantes.

Exemple : $-\frac{3}{17}$ et $-\frac{5}{19}$

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer $\frac{-3}{17}$ et $\frac{-5}{19}$.

On calcule les produits :

$-3 \times 19 = -57$ et $-5 \times 17 = -85$.

On compare les produits : $-57 > -85$ donc $-\frac{3}{17} > -\frac{5}{19}$.

a. $-\frac{16}{31}$ et $-\frac{3}{5}$

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer et

On calcule les produits $\times$ = ... et $\times$ = ...

On compare les produits : donc

b. $-\frac{7}{10}$ et $-\frac{19}{30}$

Ici les fractions sont négatives. On porte le signe « - » au numérateur. Cela revient donc à comparer et

On calcule les produits $\times$ = ... et $\times$ = ...

On compare les produits : donc

Pour s'exercer

10 Calculer $\frac{11}{9} + \frac{10}{9}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

11 Calculer $\frac{15}{17} - \frac{6}{17}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

12 Calculer $\frac{5}{28} - \frac{12}{28}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

13 Calculer $\frac{4}{3} + \frac{9}{8}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

14 Calculer $\frac{7}{3} - \frac{5}{4}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

15 Calculer $\frac{8}{15} - \frac{1}{9}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

16 Calculer $\frac{8}{3} \times \frac{7}{16}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

17 Calculer $\frac{1}{8} \times \frac{2}{7}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

18 Calculer $\frac{7}{6} \div \frac{3}{8}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

19 Calculer $\frac{2}{7} \div \frac{8}{3}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

20 Calculer $\frac{4}{7} \div \frac{16}{9}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

.....

.....

21 Calculer $\frac{2}{3} \div \frac{9}{2}$. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

.....

.....

22 Comparer $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{5}$.

.....

.....

23 Comparer $-\frac{8}{7}$ et $-\frac{9}{7}$.

.....

.....

24 Comparer $\frac{9}{2}$ et $\frac{6}{5}$.

.....

.....

25 Comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$.

.....

.....

26 Comparer $-\frac{9}{2}$ et $-\frac{2}{3}$.

.....

.....

27 Comparer $-\frac{3}{7}$ et $-\frac{7}{9}$.

.....

.....

Rappel

Soient a, b deux réels non nuls et m, n deux entiers relatifs.

$$\text{Si } n > 0, a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs } a} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Pour bien démarrer

01 Écrire $37 \times 37 \times 37 \times 37 \times 37$ sous la forme d'une puissance de 37.

.....
.....

02 Écrire $\frac{1}{56^{59}}$ sous la forme d'une puissance de 56.

.....
.....

03 Écrire $7^5 \times 7^9$ sous la forme d'une puissance de 7.

.....
.....

04 Écrire $\frac{11^{15}}{11^{12}}$ sous la forme d'une puissance de 11.

.....
.....

05 Écrire $(2^8)^6$ sous la forme d'une puissance de 2.

.....
.....

06 Écrire $8^4 \times 9^4$ sous la forme d'une puissance de 72.

.....
.....

07 Écrire $\frac{40^9}{8^9}$ sous la forme d'une puissance de 5.

.....
.....

Pas à pas

08 Écrire 72 sous la forme $2^a \times 3^b$.

a. On commence par décomposer 72 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $72 = \dots \times \dots$

b. Ensuite, on décompose sous la forme d'une puissance de 2 et on décompose sous la forme d'une puissance de 3.

On a donc : $72 = 2^{\dots} \times 3^{\dots}$

09 Écrire 45^6 sous la forme $3^a \times 5^b$.

a. On commence par décomposer 45 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $45 = \dots \times \dots$

b. Ensuite, on décompose sous la forme d'une puissance de 3 et on décompose sous la forme d'une puissance de 5.

On a donc : $45 = 3^{\dots} \times 5^{\dots}$

c. Enfin on applique les règles sur les puissances pour écrire 45^6 sous la forme $3^a \times 5^b$:

$$45^6 = (3^{\dots} \times 5^{\dots})^6 = 3^{\dots \times 6} \times 5^{\dots \times 6} = 3^{\dots} \times 5^{\dots}$$

10 Écrire $36^5 \times 24^3$ sous la forme $2^a \times 3^b$.

a. On commence par décomposer 36 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $36 = \dots \times \dots$

b. Ensuite, on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 2 et on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 3.

c. Enfin, on applique les règles sur les puissances pour écrire 36^5 sous la forme $2^a \times 3^b$. On a donc :

$$36^5 = (2^{\dots} \times 3^{\dots})^5 = 2^{\dots \times 5} \times 3^{\dots \times 5} = 2^{\dots} \times 3^{\dots}$$

d. On décompose ensuite 24 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $24 = \dots \times \dots$

e. Ensuite, on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 2 et on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 3.

f. Enfin, on applique les règles sur les puissances pour écrire 24^3 sous la forme $2^a \times 3^b$. On a donc :

$$24^3 = (2^{\dots} \times 3^{\dots})^3 = 2^{\dots \times 3} \times 3^{\dots \times 3} = 2^{\dots} \times 3^{\dots}$$

g. A l'aide des règles sur les puissances on a alors :

$$36^5 \times 24^3 = 2^{\dots} \times 3^{\dots} \times 2^{\dots} \times 3^{\dots} \\ = 2^{\dots + \dots} \times 3^{\dots + \dots} = 2^{\dots} \times 3^{\dots}$$

11 Écrire $\frac{20^8}{100^4}$ sous la forme $2^a \times 5^b$.

a. On commence par décomposer 20 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $20 = \dots \times \dots$

b. Ensuite, on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 2 et on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 5.

c. Enfin, on applique les règles sur les puissances pour écrire 20^8 sous la forme $2^a \times 5^b$. On a donc :

$$20^8 = (2^{\dots} \times 5^{\dots})^8 = 2^{\dots \times 8} \times 5^{\dots \times 8} = 2^{\dots} \times 5^{\dots}$$

d. On décompose ensuite 100 à l'aide des tables de multiplication.

On a donc $100 = \dots \times \dots$

e. Ensuite, on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 2 et on décompose $\dots$ sous la forme d'une puissance de 5.

f. Enfin, on applique les règles sur les puissances pour écrire 100^4 sous la forme $2^a \times 5^b$. On a donc :

$$100^4 = (2^{\dots} \times 5^{\dots})^4 = 2^{\dots \times 4} \times 5^{\dots \times 4} = 2^{\dots} \times 5^{\dots}$$

g. A l'aide des règles sur les puissances on a alors :

$$\frac{20^8}{100^4} = \frac{2^{\dots} \times 5^{\dots}}{2^{\dots} \times 5^{\dots}} \\ = 2^{\dots - \dots} \times 5^{\dots - \dots} = 2^{\dots} \times 5^{\dots}$$

Pour s'exercer

12 Écrire 88 sous la forme $2^a \times 11^b$.

.....
.....

13 Écrire 94 sous la forme $2^a \times 47^b$.

.....
.....

14 Écrire 175 sous la forme $5^a \times 7^b$.

.....
.....

15 Écrire 64^5 sous la forme d'une puissance de 2.

.....
.....

16 Écrire 27^4 sous la forme d'une puissance de 3.

.....
.....

17 Écrire 125^7 sous la forme d'une puissance de 5.

.....
.....

18 Écrire 48×54 sous la forme $2^a \times 3^b$.

.....
.....

19 Écrire $75^4 \times 27^8$ sous la forme $3^a \times 5^b$.

.....
.....

20 Écrire $30^2 \times 12^3 \times 60^4$ sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

.....
.....

21 Ecrire $\frac{42}{56}$ sous la forme $2^a \times 3^b \times 7^c$.

22 Ecrire $\frac{7^2}{63}$ sous la forme $2^a \times 7^b$.

23 Ecrire $\frac{75^8}{15^4}$ sous la forme $3^a \times 5^b$.

24 Ecrire $\frac{12^5}{3^4 \times 2^{11}}$ sous la forme $2^a \times 3^b$.

25 Ecrire $\frac{36^5}{8^3 \times 2^{14}}$ sous la forme $2^a \times 3^b$.

26 Ecrire $8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$ sous la forme $2^a \times 5^b \times 7^c$.

27 Ecrire $9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{5 \times 2^2}{(3^2 \times 2)^4}$ sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

28 Ecrire $\frac{(3 \times 10 - 2)^2 \times (5^3 \times 10^4)^2}{6 \times 10^3 \times 25 \times 10^7}$ sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$.

Rappel

- Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100. Par exemple $12\% = \frac{12}{100} = 0,12$
- Une écriture décimale est une écriture avec une virgule, comme 0,12
- Une écriture fractionnaire est une écriture sous forme de fraction, comme $\frac{3}{4}$
- Ces trois formes peuvent représenter le même nombre : $0,25 = 25\% = \frac{1}{4}$

Pas à pas

01 En vous inspirant des exemples suivants, écrire sous forme irréductible.

Exemple : $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$
 $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75 \div 5}{100 \div 5} = \frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$

a. $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{25 \div 5}{100 \div 5} = \frac{\quad}{\quad}$

b. $0,4 = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c. $0,125 = \frac{\quad}{1000} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d. $0,005 = \frac{\quad}{1000} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

e. $0,2 = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

02 En vous inspirant de l'exemple suivant, écrire sous forme décimale.

Exemple : $\frac{7}{25} = \frac{7 \times 4}{25 \times 4} = \frac{28}{100} = 0,28$

a. $\frac{1}{2} = \frac{1 \times \quad}{2 \times \quad} = \frac{\quad}{10} = \quad$

b. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times \quad}{4 \times \quad} = \frac{\quad}{100} = \quad$

c. $\frac{2}{5} = \frac{2 \times \quad}{5 \times \quad} = \frac{\quad}{10} = \quad$

d. $\frac{13}{125} = \frac{13 \times \quad}{125 \times \quad} = \frac{\quad}{1000} = \quad$

03 Écrire les pourcentages suivants sous forme décimale.

Exemple : $13,3\% = \frac{13,3}{100} = 0,133$

a. $10\% = \frac{\quad}{100} = \quad$

b. $74\% = \frac{\quad}{100} = \quad$

c. $6,4\% = \frac{\quad}{100} = \quad$

d. $17,2\% = \frac{\quad}{100} = \quad$

04 Écrire les pourcentages suivants sous forme de fraction irréductible.

Exemple : $75\% = \frac{75}{100} = \frac{75 \div 5}{100 \div 5} = \frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$

a. $15\% = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad \div 5}{100 \div 5} = \frac{\quad}{\quad}$

b. $52\% = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad \div 4}{100 \div 4} = \frac{\quad}{\quad}$

c. $0,8\% = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000} = \frac{\quad \div 8}{1000 \div 8} = \frac{\quad}{\quad}$

05 Passer du pourcentage à l'écriture décimale puis à la fraction irréductible.

Exemple : $60\% = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

a. $150\% = \quad = \quad = \quad$

a. $12,5\% = \quad = \quad = \quad$

a. $7,5\% = \quad = \quad = \quad$

a. $0,5\% = \quad = \quad = \quad$

Pour s'exercer

06 Compléter les égalités suivantes :

a. $0,4 = \quad = \quad \%$

b. $\frac{3}{5} = \quad = \quad \%$

c. $30\% = \quad = \quad$

d. $0,375 = \quad = \quad$

e. $2,5\% = \quad = \quad$

f. $\frac{4}{25} = \quad = \quad \%$

07 Vrai ou Faux ?

- a. $\frac{1}{3} = 0,333$ ☐ vrai ☐ faux
- b. $0,5 = \frac{1}{2}$ ☐ vrai ☐ faux
- c. $25 \% = \frac{1}{2}$ ☐ vrai ☐ faux
- d. $\frac{1}{5} = 0,2$ ☐ vrai ☐ faux
- e. $0,4 = \frac{2}{3}$ ☐ vrai ☐ faux
- f. $\frac{1}{8} = 0,125$ ☐ vrai ☐ faux
- g. $\frac{2}{3} = 66 \%$ ☐ vrai ☐ faux
- h. $\frac{3}{10} = 30 \%$ ☐ vrai ☐ faux
- e. $\frac{5}{4} = 1,25$ ☐ vrai ☐ faux

08 Associer chaque écriture à ses deux formes équivalentes.

25 %	•	•	75%	•	•	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{5}$	•	•	80 %	•	•	$\frac{1}{2}$
50 %	•	•	$\frac{3}{5}$	•	•	$\frac{3}{4}$
0,75	•	•	0,1	•	•	0,25
0,6	•	•	0,4	•	•	60 %
10 %	•	•	0,125	•	•	$\frac{1}{8}$
0,8	•	•	$\frac{1}{4}$	•	•	40 %
12,5 %	•	•	0,5	•	•	$\frac{1}{10}$

Rappel

- **Estimer un ordre de grandeur**, c'est approcher une valeur sans la calculer exactement, afin de :
 - Vérifier la cohérence d'un résultat ;
 - Comparer des valeurs ou des grandeurs ;
 - Obtenir une approximation raisonnable et rapide.
- On utilise pour cela :
 - Des arrondis vers des nombres ronds proches (ex : $698 \approx 700$) ;
 - Des puissances de 10 (ex : $4832 \approx 5 \times 10^3$) ;
 - Des encadrements (ex : 54 est entre 10 et 10^2)
 - La négligence de termes très petits devant des termes très grands (ex : $10^{14} + 0,1 \approx 10^{14}$)
- Si l'écriture scientifique d'un nombre réel est $a \times 10^n$, avec a décimal vérifiant $1 \leq a < 10$ et n entier relatif, alors :
 - si $1 \leq a < 5$ l'ordre de grandeur de $a \times 10^n$ est 10^n
 - si $5 \leq a < 10$ l'ordre de grandeur de $a \times 10^n$ est 10^{n+1}

Par exemple l'ordre de grandeur de $2,345 \times 10^5$ est 10^5 , celui de $5,415 \times 10^5$ est 10^6 .

Pas à pas

01 Quel est l'ordre de grandeur de 3 056 635,296 ?

a. On commence par déterminer l'écriture scientifique de 3 056 635,296.

Ici, on doit décaler la virgule vers la gauche, si bien que la puissance de 10 sera positive.

On a : $3\,056\,635,296 = 3,056\,635\,296 \times 10^{\dots\dots}$.

b. On compare ensuite 3,056 635 296 à 5.

Ici, 3,056 635 296 5.

c. L'ordre de grandeur de 3 056 635,296 est donc $10^{\dots\dots}$.

02 Quel est l'ordre de grandeur de 50 996,15 756 ?

a. On commence par déterminer l'écriture scientifique de 50 996,15 756.

Ici, on doit décaler la virgule vers la gauche, si bien que la puissance de 10 sera positive.

On a : $50\,996,15\,756 = 5,099\,615\,756 \times 10^{\dots\dots}$.

b. On compare ensuite 5,099 615 756 à 5.

Ici, 5,099 615 756 5.

c. L'ordre de grandeur de 50 996,15 756 est donc $10^{\dots\dots}$.

03 Quel est l'ordre de grandeur de 0,0267583 ?

a. On commence par déterminer l'écriture scientifique de 0,026 758 3.

Ici, on doit décaler la virgule vers la droite, si bien que la puissance de 10 sera négative.

On a : $0,026\,758\,3 = 2,675\,83 \times 10^{\dots\dots}$.

b. On compare ensuite 2,675 83 à 5.

Ici, 2,675 83 5.

c. L'ordre de grandeur de 0,0267583 est donc $10^{\dots\dots}$.

04 Quel est l'ordre de grandeur de 0,000 070 538 ?

a. On commence par déterminer l'écriture scientifique de 0,000 070 538.

Ici, on doit décaler la virgule vers la droite, si bien que la puissance de 10 sera négative.

On a : $0,000\,070\,538 = 7,0538 \times 10^{\dots\dots}$.

b. On compare ensuite 7,0538 à 5.

Ici, 7,0538 5.

c. L'ordre de grandeur de 0,000 070 538 est donc $10^{\dots\dots}$.

Pour s'exercer

05 Quel est l'ordre de grandeur de 0,28386 ?

.....

06 Quel est l'ordre de grandeur de 42,949 ?

.....

07 Quel est l'ordre de grandeur de 0,07202 ?

.....

08 Quel est l'ordre de grandeur de 59729 ?

.....

09 Quel est l'ordre de grandeur de 0,0001621 ?

10 Donner la puissance de 10 la plus proche de chaque nombre.

Exemple : $782 \approx 10^3$; $31\,627 \approx 10^4$

a. $248 \approx \dots\dots\dots$

b. $5\,124 \approx \dots\dots\dots$

c. $19\,367 \approx \dots\dots\dots$

d. $801\,000 \approx \dots\dots\dots$

e. $0,074 \approx \dots\dots\dots$

f. $6,42 \approx \dots\dots\dots$

11 Encadrer chaque nombre entre deux puissances de 10.

Exemple : 34 est entre 10^1 et 10^2 .

a. 583 est entre : $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

b. 0,0071 est entre : $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

c. 23 000 est entre : $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

d. 0,48 est entre : $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

e. 1 250 000 est entre : $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

12 Estimer la puissance de 10 la plus proche de chaque expression.

Exemple : $19 \times 51 \approx 20 \times 50 = 1000 = 10^3$.

a. $19 \times 38 \approx \dots\dots\dots$

b. $104 \times 197 \approx \dots\dots\dots$

c. $3,14 \times 9,8 \approx \dots\dots\dots$

d. $1,98 \times 12,2 \approx \dots\dots\dots$

e. $48,2 \div 9,7 \approx \dots\dots\dots$

13 Estimer la puissance de 10 la plus proche des expressions suivantes.

a. $2,98 \times 98 \approx \dots\dots\dots$

b. $0,48 \times 123 \approx \dots\dots\dots$

c. $\frac{98,6}{9,9} \approx \dots\dots\dots$

d. $\frac{5,1 \times 8,2}{2,05} \approx \dots\dots\dots$

e. $(2,01)^2 \approx \dots\dots\dots$

14 Estimer la puissance de 10 la plus proche des expressions suivantes.

a. $49 \times 202 \approx \dots\dots\dots$

b. $3,98 \times 9,8 \approx \dots\dots\dots$

c. $1875 \div 62 \approx \dots\dots\dots$

d. $\frac{1,98^2}{0,49} \approx \dots\dots\dots$

e. $\sqrt{48} \approx \dots\dots\dots$

15 Repérer les résultats incohérents.

a. $42 \times 19 = 798$

☐ Cohérent ☐ Incohérent

b. $248 \times 97 = 24\,056$

☐ Cohérent ☐ Incohérent

c. $3,1 \times 9,8 = 28,52$

☐ Cohérent ☐ Incohérent

d. $102 \times 305 = 3\,111$

☐ Cohérent ☐ Incohérent

e. $0,24 \times 998 = 23,952$

☐ Cohérent ☐ Incohérent

16 Pour chaque question, cocher la bonne réponse (on attend la puissance de 10 la plus proche ou une estimation pertinente).

1. $101 \times 99 \approx$

☐ 100 ☐ 1 000 ☐ 10 000 ☐ 100 000

2. $10^{30} + 10^{-30} \approx$

☐ 0 ☐ 1 ☐ 10^{30} ☐ 10^{-30}

3. $999^2 \approx$

☐ 10^3 ☐ 10^4 ☐ 10^5 ☐ 10^6

4. $\sqrt{50} \approx$

☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

5. $12,4 \times 98,6 \approx$

☐ 120 ☐ 1200 ☐ 12000 ☐ 120000

6. $\frac{3,98 \times 198}{9,87} \approx$

☐ 10 ☐ 100 ☐ 1000 ☐ 10000

7. $2^{10} \approx$

☐ 10 ☐ 100 ☐ 1000 ☐ 10000

8. $3,14 \times 9,81 \approx$

☐ 3 ☐ 9 ☐ 30 ☐ 300

9. $0,0047 \times 20000 \approx$

☐ 0,01 ☐ 1 ☐ 10 ☐ 100

10. Puissance de 10 la plus proche de 4200

☐ 10^2 ☐ 10^3 ☐ 10^4 ☐ 10^5

11. $10^{10} + 10^9 \approx$

☐ 10^9 ☐ 2×10^9 ☐ 10^{10} ☐ 10^{11}

17. Classer dans l'ordre croissant.

- $\pi \times 10^2$;
- $3,5 \times 10^4$;
- 2×10^3 ;
- $7,2 \times 10^2$;
- $1,2 \times 10^5$;
- $\frac{1}{2} \times 10^6$

18. Indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse.

a. $\pi \times 15^2 \approx 300$

☐ Vrai ☐ Faux

b. $\sqrt{2} \times 10^5 \approx 1,4 \times 10^5$;

☐ Vrai ☐ Faux

c. $\frac{5,2 \times 10^3}{8,1 \times 10^2} \approx 0,64$;

☐ Vrai ☐ Faux

d. $(1,2 \times 10^3)^2 \approx 1,44^5$;

☐ Vrai ☐ Faux

Rappel

- Il est important, après un calcul, de vérifier si le résultat obtenu a du sens, réaliste, cohérent avec les données.
- Des erreurs de calcul, d'unités, ou d'interprétation peuvent mener à un résultat mathématiquement juste mais absurde.
- Pour cela, on peut :
 - Certains résultats peuvent être estimés de tête pour vérifier une approximation (cf. item 12).
 - Vérifier les unités : un résultat en euros, en pourcentage, en personnes, etc.
 - **Comparer avec des bornes connues :**
 - une proportion ne peut pas dépasser 100 %,
 - une moyenne ne peut pas être inférieure au minimum ou supérieure au maximum,
 - une remise doit faire baisser le prix,
 - Une variation positive puis négative ne revient pas à une variation nulle.
 - Un prix, une distance ou un nombre de personnes ne peut pas être négatif.
 - Un ordre de grandeur trop élevé (ex : « le prix d'une baguette est 2400€ ») peut indiquer une erreur.

Pour s'exercer

01 Parmi les résultats suivants, cochez ceux qui semblent possibles et cohérents dans leur contexte.

a. Un élève a eu 18, 19 et 20 au bac blanc. Sa moyenne est 17.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

b. Une entreprise augmente un salaire de 10 %. Le salarié passe de 2000 € à 2200 €.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

c. On réduit un prix de 20 %, il passe de 100 € à 80 €.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

d. Dans un produit alimentaire il y a 120 % de lait.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

e. On a calculé que 25 % de 400 vaut 150.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

02 Pour chacun des résultats suivants, donnez un ordre de grandeur attendu (sans calcul précis), puis dites si le résultat donné est vraisemblable.

Exemple : On achète 3,5 kg de pommes à 2 € le kilo. Le prix payé est de 12 €.

A 2 € les 3 Kg : 8 € pour 12 Kg. A 2 € les 4 Kg : 6 € pour 12 Kg. Donc le prix attendu est entre 6 et 8 €. Prix incohérent.

a. Un téléphone coûte 300 €. On applique une remise de 15 %. Le prix final est de 280 €.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

b. Une réduction de 10 % fait passer un produit de 50 € à 40 €.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

c. Un commerçant dit qu'une augmentation de 25 % fait passer un prix de 120 € à 150 €.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

d. « Cette veste est à -30 % : elle passe de 100 € à 80 € »

☐ Cohérent ☐ Incohérent

03 Une élève obtient 10, 12, 13 et 15 à ses quatre évaluations. On annonce que sa moyenne est 14.

a. La moyenne annoncée est-elle vraisemblable ? Pourquoi ?

b. Proposer une estimation raisonnable de la moyenne.

04 Un site propose une réduction de 40 % sur un produit à 150 €. Le client affirme qu'il va payer 90 € de moins.

a. Ce raisonnement est-il juste ?

☐ Cohérent ☐ Incohérent

b. Quel est réellement le montant de la réduction ?

c. Le prix final est-il 60 € ? Justifier.

05 Un sac de riz de 5 kg coûte 11,75 €. Un élève écrit : « 1 kg coûte 2,45 €, donc 10 kg coûtent 24,50 €. »

☐ Cohérent ☐ Incohérent

06 Un produit à 75 € subit une augmentation de 30 %.

Peut-il maintenant coûter 105 € ?

☐ Cohérent ☐ Incohérent

07 On affirme que 18 % de 2000 est égal à 1800. Cela te semble-t-il cohérent ?

☐ Cohérent ☐ Incohérent

08 Une entreprise de 500 salariés annonce que 10 % ☐ ☐

Cohérent ☐ Incohérent

09 Un salarié gagne 2400 € par mois. Il consacre 60 % de son salaire à son logement. Peut-il payer 1800 € de loyer ?

☐ Cohérent ☐ Incohérent

10 Lors d'un sondage, sur 1200 personnes, 1000 disent ne pas faire confiance au gouvernement. On dit que c'est 8 % des sondés.

☐ Cohérent ☐ Incohérent

11 La masse d'un objet est solution de l'équation $(x - 3)(x + 2) = 0$. Déterminer la masse de l'objet.

12 Un artisan veut fabriquer un récipient dont le volume doit être de 36 dm^3 . Il choisit un parallélépipède rectangle de hauteur 3 dm et dont la base est un carré de côté x dm. Déterminer x .

13 Un capteur thermique indique qu'une température t , en degrés Celsius, vérifie : $t^2 - 49 = 0$. Déterminer t .

14 On réduit chaque côté d'un carré de 5 cm. L'aire du nouveau carré est de 36 cm^2 . Déterminer la valeur x de la longueur initiale du côté.

14

Effectuer des conversions d'unités : longueurs, aires, volumes, contenances, durées, vitesses, masses.

Rappel

- On rappelle ci-dessous la forme des tableaux de conversion pour l'unité de longueur (mètre m), l'unité de masse (gramme g) et l'unité de capacité (litre L).

Préfixes	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
Unités de longueur	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Unités de masse	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Unités de capacité	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

Exemple 1 : Pour convertir 12,3456 dam en cm, il suffit de placer 12,3456 dam dans un tableau de conversion (en plaçant bien la virgule au bout de la colonne des dam et en ne mettant qu'un seul chiffre par colonne de part et d'autre de la virgule) et de déplacer la virgule au bout de la colonne des cm. On obtient alors :

D'où : 12,3456 dam = 12345,6 cm.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	1	2,	3	4	5,	6

D'où : 12,3456 dam = 12345,6 cm.

Exemple 2 : Pour convertir 7,89 g en kg, il suffit de placer 7,89 g dans un tableau de conversion (en plaçant bien la virgule au bout de la colonne des g et en ne mettant qu'un seul chiffre par colonne de part et d'autre de la virgule) et déplacer la virgule au bout de la colonne des kg tout en ajoutant des chiffres « 0 » si nécessaire. On obtient alors :

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,	0	0	7,	8	9	

D'où : 7,89 g = 0.00789 kg.

- Pour les unités d'aire le principe est analogue mais il faut prévoir deux colonnes par unité.

Exemple : 12,345 dm² = 1234,5 cm² car :

km ²		hm ²		dam ²		m ²		dm ²		cm ²		mm ²	
								1	2,	3	4,	5	

- Pour les unités du volume le principe est toujours analogue mais il faut prévoir cette fois trois colonnes par unité. Notons qu'un litre est égal à un décimètre cube : 1 L = 1 dm³ ou encore 1 000 L = 1 m³.

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
											0,	0	0	0	0	0	7,	8	9	
														0,	0	0	7,	8	9	

Exemple : 7,89 cm³ = 0,00000789 mm³ = 7,89 cm³.

- Pour les unités de temps on effectue généralement des produits en croix avec : 1 h = 60 min et 1 min = 60 s.
- Pour convertir une vitesse on peut commencer par convertir l'unité en longueur puis on convertit l'unité de temps.

Exemple : 45 km.h⁻¹ = 45 000 m.h⁻¹ = $\frac{45\,000}{60}$ m.min⁻¹ = 750 m.min⁻¹.

Pas à pas

01 Convertir 5,73 km en m.

a. On commence par placer 5,73 km dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
5,73						

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des m.

On a donc : 5,73 km = ... m.

02 Convertir 36,2 cm en dam.

a. On commence par placer 36,2 cm dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					36,2	

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la gauche et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des dam.

On a donc : 36,2 cm = 0,362 m

03 Convertir 9,59 g en mg.

a. On commence par placer 9,59 g dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
			9,59			

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des mg.

On a donc : 9,59 g = ... mg

04 Convertir 327,03 dg en hg.

a. On commence par placer 327,03 dg dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
				327,03		

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la gauche et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des hg.

On a donc : 327,03 dg = ... hg.

05 Convertir 301,071 L en cL.

a. On commence par placer 301,071 L dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule.

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
			301,071			

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des cL.

On a donc : 301,071 L = ... cL.

06 Convertir 839 mL en dL.

a. On commence par placer 839 mL dans un tableau de conversion.

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

b. Ensuite, on place le virgule au niveau de colonne des d.L

On a donc : 839 mL = ... dL.

07 Convertir 482,75 hm² en dam²

a. On commence par placer 482,75 hm² dans un tableau de conversion.

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite pour arriver jusqu'à la colonne des dam².

On a donc : 482,75 hm² = ... 48275 dam².

08 Convertir 491,1 m² en km².

a. On commence par placer 491,1 m² dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule et en veillant à mettre deux chiffres par unité.

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la gauche et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des km².

On a donc : 491,1 m² = ... km².

09 Convertir 127,34 cm³ en mm³.

a. On commence par placer 127,34 cm³ dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule et en veillant à mettre trois chiffres par unité.

km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des mm³.

On a donc : 127,34 cm³ = ... 127340 mm³.

10 Convertir 1776,8 dam³ en hm³.

a. On commence par placer 1776,8 dam³ dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule et en veillant à mettre trois chiffres par unité.

km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la gauche pour arriver jusqu'à la colonne des hm³.

On a donc : 1776,8 dam³ hm³.

11 Convertir 61,72 m³ en L.

a. On commence par placer 61,72 m³ dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule et en veillant à mettre trois chiffres par unité de volume.

km^3		hm^3		dam^3		m^3		dm^3		cm^3		mm^3		
								kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la droite et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des L.

On a donc : $61,72 \text{ m}^3 = \frac{61,72}{1000} \text{ L} = 61,72 \text{ L}$

12 Convertir 5,148 kL en dam^3 .

a. On commence par placer 5,148 kL dans un tableau de conversion en faisant attention à la place de la virgule et en veillant à mettre trois chiffres par unité de capacité.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
																</				

b. Ensuite, on déplace la virgule vers la gauche et on ajoute des « 0 » si besoin pour arriver jusqu'à la colonne des dam^3 .

On a donc : $5,148 \text{ kL} = 5,148 \text{ dam}^3$.

13 Convertir 6 h 26 min 42 s sous la forme d'un nombre décimal d'heures.

Si on note H le nombre d'heures, M le nombre de minutes et S le nombre d'heures, alors le nombre décimal d'heures est

$$H + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600}$$

Ici, on a donc $6 \text{ h } 26 \text{ min } 42 \text{ s} = 6 + \frac{26}{60} + \frac{42}{3600} = 6,445 \text{ h}$.

14 Convertir 9,34 h sous la forme h min s.

a. Le nombre d'heures pleines est la partie entière de 9,34 (c'est-à-dire, pour un nombre positif, la partie située avant la virgule).

Dans 9,34 h, il y a donc h pleines.

b. On s'intéresse ensuite à la partie décimale de 9,34. On la multiplie par 60 pour obtenir le nombre décimal de minutes.

Ici, on a $0,34 \times 60 = 20,4 \text{ min}$.

c. Enfin, on s'intéresse à la partie décimale du nombre de minutes. On la multiplie par 60 pour obtenir le nombre de secondes (éventuellement décimal auquel cas il peut y avoir des dixièmes, des centièmes, des millièmes... de secondes).

Ici, on a $0,4 \times 60 = 24 \text{ s}$.

d. Finalement : $9,34 \text{ h} = 9 \text{ h } 20 \text{ min } 24 \text{ s}$.

15 Convertir $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

a. On commence par convertir l'unité de longueur : $5 \text{ m} = 0,005 \text{ km}$.

b. La distance parcourue en une heure est 3600 fois plus grande que celle parcourue en une seconde (puisque $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$).

Donc : $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,005 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 0,005 \times 3600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

16 Convertir $54 \text{ dm} \cdot \text{min}^{-1}$ en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

a. On commence par convertir l'unité de longueur : $54 \text{ dm} = 540 \text{ cm}$.

b. La distance parcourue en une seconde est 60 fois moindre que celle parcourue en une minute (puisque $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$).

Donc : $54 \text{ dm} \cdot \text{min}^{-1} = 540 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{540}{60} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1000000

Pour s'exercer

17 Convertir 0,155 m en cm.

18 Convertir 59,498 dag en kg.

59498 kg

19 Convertir 3,066 L en cL.

20 Convertir 5,7003 kL en daL.

21 Convertir 0,98 dm² en mm².

22 Convertir 386 517 cm² en m².

23 Convertir 37,4644 dam³ en dm³.

24 Convertir 0,665 km³ en hm³.

25 Convertir 7,045 m³ en mL.

7,045 x 1000 000
7045000 mL

26 Convertir 8 513,53 cL en dam³.

27 Convertir 7 h 15 min 36 s sous la forme d'un nombre décimal d'heures.

28 Convertir 2,56 h sous la forme ... h ... min ... s.

29 Convertir 7 cm · s⁻¹ en m · h⁻¹.

30 Convertir 24 hm · h⁻¹ en dam · min⁻¹.

240 dam h⁻¹ $\Rightarrow \frac{24 \times 100}{60} = \frac{24 \times 10}{6} = \frac{24}{1} = 24$

31 Sachant qu'un are est égal à 1 dam², convertir 250 ares en m².

32 Sachant qu'un hectare est égal à 100 ares et qu'un are est égal à 100 m², convertir 5 hectares en m².

1 Suites numériques

1 Notion de suite

Intuitivement une suite de nombres réels est une liste ordonnée de nombres réels « numérotés » à l'aide d'entiers naturels.

Définition 1.1

Suite numérique

On appelle suite numérique toute fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement pour $n \geq k$ avec $k \in \mathbb{N}$).

Le nombre $u(n)$, noté u_n (« u indice n ») est appelé terme de rang n ou terme général de la suite.

La suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq k}$) ou plus simplement (u_n) .

Remarque

Il ne faut pas confondre le nombre u_n et (u_n) : u_n est le terme de rang n de la suite (u_n) .

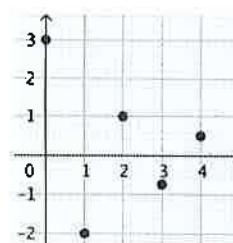
Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite est constituée de points isolés pouvant être représentés :

- soit en plaçant les réels $u_0, u_1, \dots$ sur une droite graduée,



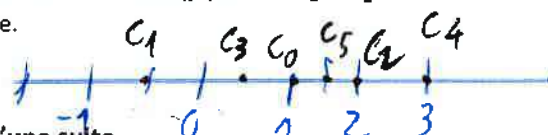
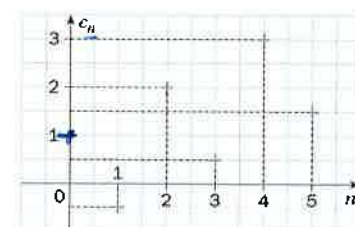
- soit en plaçant les points de coordonnées $(0; u_0), (1; u_1), \dots$ dans un repère.



Sur le graphique ci-contre on a représenté les premiers termes d'une suite (c_n) .

Exemple 1.1

1. Quelle est la valeur du deuxième terme de la suite ?
2. Quelle est la valeur du terme qui précède c_4 ?
3. Représenter les termes c_n , pour $n \in [0; 5]$ sur une droite graduée.



2 Modes de génération d'une suite

Une suite (u_n) est entièrement définie sur $\mathbb{N}$ (resp à partir d'un certain rang k) si on est capable de donner u_n pour n'importe quel entier $n \in \mathbb{N}$ (resp $n \geq k$). Il existe beaucoup de façons pour définir une suite mais au lycée on en distingue principalement deux : explicitement ou par récurrence.

2.1 Suites définies par une formule explicite $u_n = f(n)$

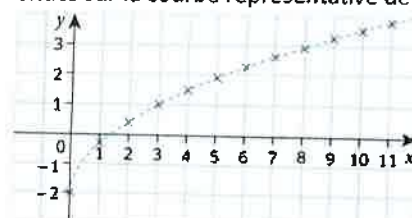
Définition 1.2

formule explicite : $u_n = f(n)$

Une suite (u_n) est donnée par une formule explicite lorsque le nombre u_n est donné en fonction du nombre n . On a donc $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Conséquence

Dans le plan muni d'un repère, les points $(n; f(n))$, représentant la suite de terme général $u_n = f(n)$, sont situés sur la courbe représentative de f .



Exemple 1.2

Pour chacune des suites de terme général u_n indiquer à partir de quel rang elle est définie, calculer ses trois premiers termes et exprimer u_{n+1} et u_{3n+1} en fonction de n et donner un algorithme renvoyant u_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

- a. $u_n = (-1)^n \sqrt{2n-1}$ b. $u_n = \frac{1}{n^2-4}$

2. 2 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ **Définition 1. 3**définition par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite est donnée sous forme récurrente (d'ordre 1) lorsque :

- son premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) est donné
- le terme u_{n+1} est donné en fonction du terme précédent u_n .

On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$, appelée relation de récurrence, où f est une fonction.**Exemple 1. 3**Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Exprimer u_1 en fonction de u_0 et calculer u_1 . Calculer u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} . Exprimer u_{2n+2} en fonction de u_{2n} .
3. Proposer une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Donner un algorithme demandant un entier n en entrée et renvoyant le nombre u_n en sortie.

Remarques

- Contrairement aux suites explicites, avec la seule donnée du premier terme et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on ne peut pas calculer un terme quelconque de la suite sans avoir obtenu tous les termes précédents.
- Une suite définie par récurrence peut faire intervenir plus de deux termes consécutifs. Par exemple, la suite de Fibonacci définie par la donnée de $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente d'ordre 2 (un terme est défini en fonction des deux termes précédents).
- La donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence d'ordre 1 ne définit pas toujours une suite. Prenons par exemple $u_0 = 2$ et $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{x-1}$.

On a $u_1 = \frac{1}{2-1} = 1$ mais u_2 n'existe pas puisque l'image de 1 par f n'existe pas. Cet exemple montre que si il existe $x \in D_f$ tel que $f(x) \notin D_f$ (ie : D_f n'est pas stable par f) alors la donnée de u_0 et d'une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ ne définit pas nécessairement une suite.

Pour autant, ce n'est pas parce que $f(D_f) \not\subseteq D_f$ qu'on ne peut pas définir une suite récurrente avec f . En effet, ce problème d'existence des termes de la suite dépend également du premier terme choisi. Prenons par exemple $u_0 = -1$.

On a alors $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{2}{3}$; $u_3 = -\frac{3}{5}$; $u_4 = -\frac{5}{8}$; etc. On pourrait montrer que lorsque $x \in [-1; 0]$ alors $f(x) \in [-1; 0]$. On en déduirait que lorsque un terme u_n appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ alors le terme suivant, $u_{n+1} = f(u_n)$, appartient aussi à l'intervalle $[-1; 0]$, ce qui permet d'affirmer, puisque $u_0 \in [-1; 0]$, que la suite est définie. Plus généralement, si u_0 appartient à un intervalle I stable par f alors $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est un élément de I .

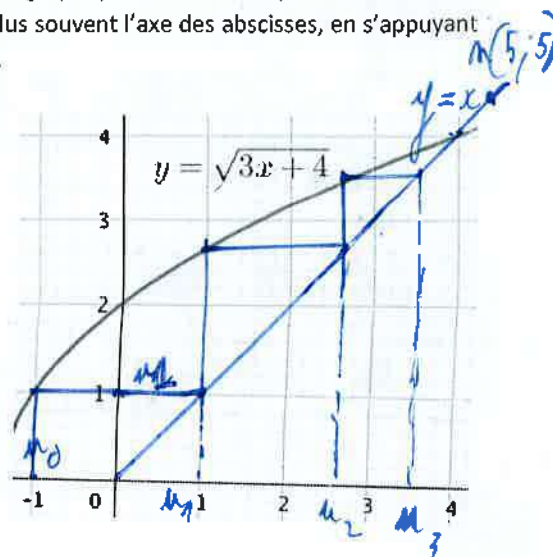
Représentation graphique

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite par l'ensemble des points $M_n(n; u_n)$. On préfère représenter ses premiers termes sur un axe, le plus souvent l'axe des abscisses, en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction définissant la relation de récurrence.

Exemple 1. 4

Construisons les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. a. Sur le graphique ci-contre tracer la droite d'équation $y = x$.
b. Placer le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses ;
c. Utiliser C_f pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées ;
d. Reporter u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$;
2. Procéder de même pour construire les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
3. (u_n) semble-t-elle converger ? Si oui vers quel réel ?



3 Sens de variation d'une suite

Définition 1.3

Suite croissante, décroissante, constante, monotone

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que

- i. (u_n) est **croissante** lorsque $u_n \leq u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- ii. (u_n) est **décroissante** lorsque $u_n \geq u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- iii. (u_n) est **constante** (ou stationnaire) lorsque $u_n = u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$;
- iv. (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque

- On définit de même une suite strictement croissante ou strictement décroissante.
- Pour certaines suites l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ n'est vraie que pour $n \geq p$. On dit alors que (u_n) est croissante à partir du rang p .
- La définition précédente ne doit pas laisser penser qu'une suite est soit croissante soit décroissante. Par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, prenant la valeur 1 si n est pair et -1 sinon, n'est ni croissante ni décroissante. Cette suite est d'ailleurs qualifiée d'alternée.
- Pour démontrer qu'une suite n'est pas monotone il suffit de deux inégalités constituant un contre exemple.

La méthode la plus générale pour étudier la monotonie d'une suite consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Propriété 1.1

monotonie et signe de $u_{n+1} - u_n$

- i. Une suite (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- ii. Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

Exemple 1.5

Etudier la monotonie de (u_n) où :

- a. $u_n = 3\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$
- b. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

Lorsque les termes d'une suite sont strictement positifs, dans certains cas, notamment pour des suites dont le terme général contient une puissance ou un produit, la propriété suivante permet d'étudier rapidement la monotonie.

Propriété 1.2

monotonie et comparaison de u_{n+1}/u_n à 1Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.

- i. (u_n) est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- ii. (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Exemple 1.6

Etudier la monotonie de (u_n) où :

- a. $u_n = \frac{7^n}{n+1}$
- b. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n(1 + n^2)$

Si une suite est définie de façon explicite par l'égalité $u_n = f(n)$, pour tout entier n , on peut utiliser le résultat suivant :

Propriété 1.3

monotonie et suites de la forme $u_n = f(n)$ Si f est une fonction définie et monotone sur un intervalle $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ a la même monotonie que f à partir du rang p .

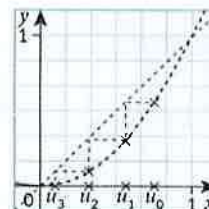
Exemple 1.7

Etudier la monotonie de (u_n) où :

$$u_n = n^2 - n$$

Remarque

- La réciproque est fautive. Le graphique ci-dessous donne un exemple de suite (u_n) croissante définie par $u_n = f(n)$ où f ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
- Ce résultat ne s'applique pas aux suites définies par récurrences. Par exemple avec la suite définie.



Activité 1 : Découvrir la notion de suite numérique

On considère la liste infinie de nombres suivante :

suite ordonnées $\rightarrow -8; -5; -2; 1; 4; 7$

1. Poursuivre la liste, de manière logique, en donnant les deux nombres suivants.

2. La liste donnée constitue une suite de nombres ordonnés qu'on appelle **suite numérique**. On peut écrire les réels de cette liste à l'aide d'une notation indicielle, permettant de numérotter les éléments de la liste, en posant par exemple $u_0 = -8; u_1 = -5; u_2 = -2; u_3 = 1$; etc. La suite $(-8; -5; -2; 1; \dots)$ s'écrit alors $(u_0; u_1; u_2; u_3; \dots)$ ou plus simplement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Quelle est la valeur du terme u_5 ?

b. Quelle est la valeur du 6^{ème} terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, comment peut-on le noter ?

3. a. Parmi les formules proposées, laquelle permet d'obtenir u_n en fonction de son rang n ?

$N = 0; 1; 2$

Cette formule est appelée **formule explicite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$u_n = n + 3 \quad u_n = -8 + 3n \quad u_n = -8n + 3$$

b. En déduire le terme de rang 20 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. L'algorithme ci-contre, rédigé en langage Python, donne la liste des premiers termes d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Déterminer le terme initial v_0 de la suite.

b. Quel est le troisième terme de la suite ? Quelle est la valeur de v_3 ?

c. Compléter la phrase : la ligne 2 permet d'afficher $v_{\dots} = \dots$

1 $v = [0, 1, 8, 27]$

2 $v.append(64)$

L'instruction `.append` de la ligne 2 permet de rajouter un terme à la liste v .

5. Comment définir une suite de manière explicite ?

Quel lien avec la notion de fonction apprise en seconde ?

Activité 2 : Découvrir la notion de suite définie par récurrence

On souhaite introduire la notion de suite définie par récurrence à l'aide du programme ci-dessous.

1 $u = \text{float}(\text{input}(\text{"entrer un nombre : "}))$

2 $u = 2 * u$

3 $u = u + 10$

4 $\text{print}(u)$

1. Appliquer le programme pour le nombre 3.

2. Appliquer de nouveau le programme au résultat obtenu.

On continue d'appliquer le programme à chaque nouveau résultat. On obtient alors une suite de nombres. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on note u_n le nombre obtenu lors de l'application du programme au n -ième résultat. On pose

$$u_0 = 3.$$

3. Préciser les valeurs de u_1, u_2 et u_3 .

4. a. Quelle formule permet de passer de u_1 à u_2 ? Et de u_2 à u_3 ?

b. Pour tout entier n , exprimer u_{n+1} en fonction u_n .

5. Combien de termes faut-il calculer pour déterminer u_{100} ?

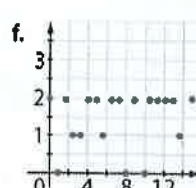
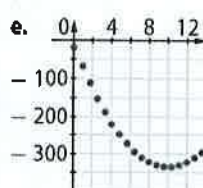
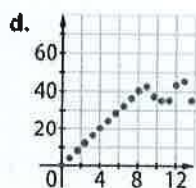
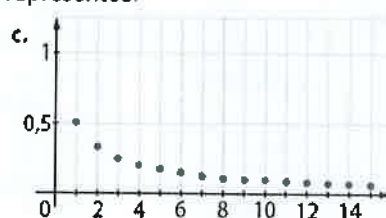
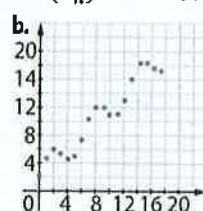
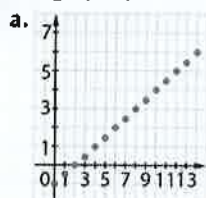
6. Compléter l'algorithme donné pour qu'il calcule et affiche u_n où n est un entier à saisir par l'utilisateur.

7. Que signifie « définir une suite par récurrence » ?

Quelle différence principale y a-t-il avec les suites définies explicitement ?

Activité 3 : Déterminer le sens de variation d'une suite

Dans chacun des graphiques ci-dessous, une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ a été représentée.



1. Pour chacune des six suites représentées, déterminer quelle(s) propriété(s) semble(nt) être vérifiée(s).

Propriété 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Propriété 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

Propriété 3 : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Propriété 4 : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

2. En considérant les suites comme des fonctions particulières, quelle(s) propriété(s) parmi les propriétés 1, 2, 3 et 4 semble(nt) caractériser le fait qu'une suite est croissante ? décroissante ? Expliquer.

1. Définir une suite

Exercice 1. 1 (Hatier 54 p 30)

Les premiers termes de la suite (t_n) sont $t_0 = 7$, $t_1 = 3$, $t_2 = 7$ et $t_3 = 3$.

Parmi les formules explicites suivantes, trouver celle qui peut correspondre à la suite (t_n) . Justifier.

- a. $7 - 4n$ b. $4n^2 - 8n + 7$
c. $7 - 4^n$ d. $5 + 2 \times (-1)^n$

Exercice 1. 2 (Hatier 55 p 30)

La suite (b_n) est la suite des multiples positifs non nuls de 7. On a alors $b_0 = 1 \times 7 = 7$.

- a. Calculer b_1 et b_2 .
b. Quel est le terme qui précède b_5 et quelle est sa valeur ?
c. Quel est le terme qui suit b_5 et quelle est sa valeur ?

Exercice 1. 3 (Hatier 65 p 31)

1. Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer une expression du terme d'indice $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

- a. $u_n = 3 - 0,5^n$ b. $v_n = 4n + \sqrt{5 + n}$
c. $w_n = \frac{2n+3}{n+7}$ d. $t_n = 1 - 5n + 2n^2$

2. Même question avec le terme d'indice $n + 2$ puis $2n + 1$.

Exercice 1. 4 (41 p 86)

Soit une suite (u_n) définie de la manière suivante : pour tout entier naturel n , le terme d'indice n est égal au carré de son rang auquel on soustrait 3.

Donner l'expression de u_n en fonction de n .

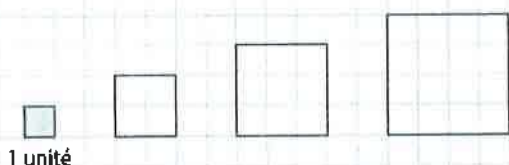
Exercice 1. 5 (44 p 86)

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer plusieurs fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à noter la liste des nombres obtenus.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance deux fois le dé ?
2. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance trois fois le dé ?
3. On appelle v_n le nombre d'issues possibles pour n lancers successifs du dé.
a. Donner les valeurs de v_1 , v_2 et v_3 .
b. Exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 1. 6 (48 p 86)

On construit une suite de carrés : le premier carré a pour côté une unité, le deuxième carré a pour côté deux unités, ..., le n -ième carré a pour côté n unités. On prend pour unité d'aire, l'aire du carré de côté une unité.



Pour tout naturel n non nul, on note a_n l'aire du n -ième carré.

1. Donner a_1 , a_2 , a_3 et a_4 .
2. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
3. Calculer la valeur de a_{11} .

Exercice 1. 7 (Hatier 57 p 20)

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les six premiers termes, puis représenter le nuage de points correspondant.

- a. Pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{0,5n+3}{n-1}$.
b. Pour tout nombre entier naturel n , $v_n = 1,5^n - 2$.
c. Pour tout nombre entier naturel n , $w_n = n^2 - n$.
d. Pour tout nombre entier naturel n , $t_n = 1 + 2 \times (-1)^n$.

2. Pour chacune des suites précédentes, exprimer le terme d'indice $n + 1$ en fonction de n .

Exercice 1. 8 (Hatier 64 p 31)

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
1 def V(n):
2     t=n*n+5
3     t=t/pow(2,n)
4     return t
```

Aide

`pow(2,n)` permet de calculer 2^n .

- a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
b. Exprimer v_n en fonction de n .
c. En déduire une autre écriture de cette fonction en Python utilisant une seule affectation.

Exercice 1. 9 (Hatier 61 p 31)

Écrire une fonction en Python de paramètre n , un nombre entier naturel, et qui renvoie la valeur de :

$$u_n = \frac{n^3 - 5}{5n + 3}.$$

Exercice 1. 10 (Hatier 63 p 31)

On utilise la feuille de calcul ci-dessous pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n) .

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	b_n					
3	c_n	-1	-1	1	5	11

- a. Pour tout nombre entier naturel n , $b_n = 3 + n + n^2$. Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on saisir dans la cellule B2 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?
b. Pour calculer les termes de la suite (c_n) , on a saisi la formule suivante dans la cellule B3 : `=B1^2-C1`. Quelle est la formule explicite de la suite (c_n) ?

Exercice 1. 11 (livrescolaire 41 p 32)

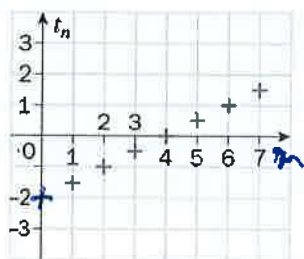
On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	C2	2	3	4
2	u_n	-2	$=3 \times C1^2 + 5 \times C1 - 2$			
3						

- Si on étend la formule de la case C2 à la case D2, quelle est la valeur de u_2 ?
- Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

Exercice 1. 12 (Hatier 58 p 30)

On a représenté ci-dessous les premiers termes de la suite (t_n) par un nuage de points.



- Réaliser un tableau de valeurs.
- Quelle remarque peut-on formuler sur les points du nuage ?
- Conjecturer une formule explicite de la suite (t_n) .
- En supposant exacte la conjecture émise à la question c, à partir de quel nombre entier k , t_k est-il supérieur à 40 ?
- Ecrire un algorithme demandant un réel positif A en entrée et revoyant le premier entier k tel que $t_k \geq A$ en sortie.

Exercice 1. 13 (Hatier 60 p 31)

On considère la succession de figures suivantes.



Figure 1

Figure 2

Figure 3

On note b_n le nombre de bâtons nécessaires à la construction de la figure n où $n \in \mathbb{N}$.

- Donner les valeurs de b_1 , b_2 et b_3 .
 - Tracer la figure 4 et donner la valeur de b_4 .
 - Conjecturer une formule explicite de la suite (b_n) .
- En supposant exacte la conjecture émise à la question 1c, déterminer :
 - la valeur de b_{20} ;
 - quelle est la plus grande figure que l'on puisse construire avec 200 bâtons.

Exercice 1. 14 (69 p 88)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{3}{2}n - 1$. Déterminer le plus petit entier p tel que $v_p > 300$.

Exercice 1. 15 (70 p 88)

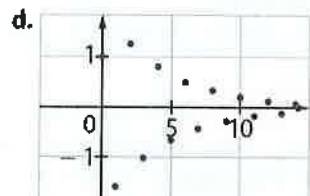
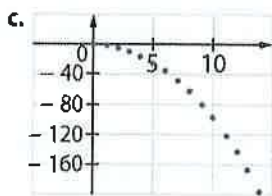
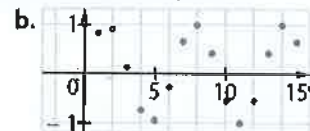
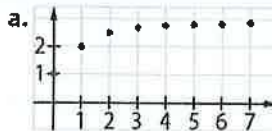
On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n , par $w_n = -n^2 + 2n + 13$. Déterminer le plus petit entier p tel que $w_p < 10$.

Exercice 1. 16 (71 p 88)

On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n , par $c_n = n^3 + 1$. Déterminer le plus petit entier p tel que $c_p > 28$.

Exercice 1. 17 (CQFD 43 p 66)

Dans chaque cas, conjecturer si possible la limite éventuelle de la suite représentée dans un repère.

**Exercice 1. 18** (22 p 85)

On considère une table de valeurs des suites suivantes. Conjecturer leur limite.

- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

n	1	10	100	1 000	10 000
u_n	0	0,99	0,999 9	0,999 999	0,999 999 99

- Pour tout entier naturel n , $u_n = n^4$.

n	1	10	100	1 000
u_n	1	10 000	100 000 000	1 000 000 000 000

Exercice 1. 19 (23 p 85)

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = n^2 - 16n + 55.$$

- A l'aide de la calculatrice, observer les termes v_n pour des grandes valeurs de n .
- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (v_n) ?

Exercice 1. 20 (CQFD 86 p 72)

Soit a , b et c des réels. On définit (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

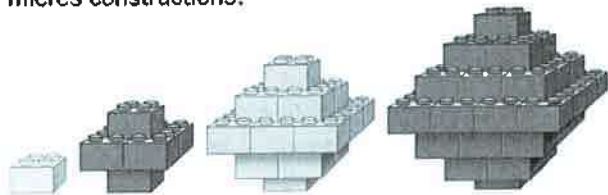
$$v_n = an^4 + bn^3 + cn^2.$$

- Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , on a $v_{n+1} - v_n = n^3$ si et seulement si $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = v_{n+1}$.
- Pour tout entier naturel non nul n , en déduire :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 1. 21 (Hatier 153 p 40)

Maëlys a fabriqué une succession d'octaèdres pleins avec des briques de construction carrées. Voici ses premières constructions.



Sa première construction est constituée d'une seule brique, la seconde de 6 et la troisième de 19.

a. Combien y a-t-il de briques carrées dans sa quatrième

construction ?

b. On note B_n le nombre de briques carrées nécessaires à la construction du $n^{\text{ème}}$ octaèdre, où n désigne un nombre entier naturel non nul.

Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = 2 \times (1 + 2^2 + \dots + n^2) - n^2$.

c. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \frac{2n^3 + n}{3}$.

d. Combien de briques le 10^e octaèdre compte-t-il ?

e. Quel est le plus grand octaèdre que l'on peut construire avec 2 000 briques carrées ?

2 Modéliser à l'aide d'une suite récurrente**Exercice 1. 22** (14 p 84)

Soit (t_n) la suite définie par son premier terme $t_0 = -3$ et telle qu'en multipliant un terme par 4 et en lui ajoutant 5 on obtienne le terme suivant.

- Déterminer t_1 et t_2 .
- Exprimer t_3 à l'aide de t_2 .

Exercice 1. 23 (58 p 87)

On donne la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 2}$.

1. u_1 est égal à :

- $\sqrt{22}$
- 2
- $\sqrt{10}$

2. u_2 est égal à :

- $\sqrt{22}$
- 2
- $\sqrt{10}$

Exercice 1. 24

Donner dans chacun des cas les valeurs de u_2 , u_3 et u_4 .

- $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, $\forall n \geq 0$;
- $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \geq 0$.

Exercice 1. 25 (42 p 86)

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n telle que $w_0 = -4$ et chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 3 et en lui ajoutant 1.

- Vérifier que w_1 est égal à -11.
- Calculer w_2 .
- Donner la relation entre w_{n+1} et w_n pour tout entier naturel n .

Exercice 1. 26 (livrescolaire 48 p 33)

On considère les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

$$\text{a. } \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n + 2 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - (n-3) \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2n+3} \end{cases}$$

- Pour chacune des suites, exprimer u_n en fonction de u_{n-1} pour tout entier $n \geq 1$ puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} pour tout entier n .

2. En déduire une expression de u_{n+2} en fonction de u_n et de l'entier n .

Exercice 1. 27 (45 p 86)

On place 15 000 € sur un livret d'épargne rémunéré à 2 % d'intérêts composés. On suppose que l'on retire 400 € chaque début d'année à partir de la deuxième année.

- Calculer le capital au bout d'un an après le retrait de 400 €.
- On appelle v_n le capital présent au bout de la n -ième année après le retrait de 400 €. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

Exercice 1. 28 (46 p 86)

On considère la suite de motifs ci-dessous dans laquelle on rajoute un point à chaque étape. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle u_n le nombre de segments tracés sur le n -ième motif.

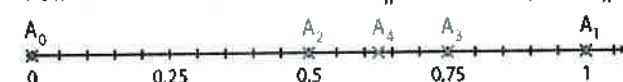


1^{er} motif 2^e motif 3^e motif 4^e motif

- Donner les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- Exprimer pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n .

Exercice 1. 29 (49 p 86)

Sur une droite graduée, le point A_0 a pour abscisse 0, le point A_1 a pour abscisse 1. Le point A_2 est le milieu de $[A_0A_1]$, A_3 est le milieu du segment joignant A_1 et A_2 . On itère le procédé et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A_n est le milieu du segment joignant A_{n-2} et A_{n-1} . Pour tout entier naturel n , on note x_n l'abscisse du point A_n .



Donner les deux premiers termes de la suite (x_n) et la relation de récurrence liant x_n , x_{n-1} et x_{n-2} .

Exercice 1. 30 (livrescolaire 46 p 33)

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

2.

Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n .

Exercice 1.31 (Hatier 88 p 33)

On utilise la feuille de calcul ci-contre pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n) .

	A	B	C
1	n	b_n	c_n
2	0		-3
3	1		1,5
4	2		0,2
5	3		-1,5
6	4		9
7	5		0,5

1. La suite (b_n) est définie par $b_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 3 - n + b_n$.

a. Quelle valeur doit-on saisir dans la cellule B2 ?
b. Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?

2. Pour calculer les termes de la suite (c_n) , on a saisi la formule suivante dans la cellule C3 : $=(C2-A2)/(C2+1)$. Définir la suite (c_n) .

Exercice 1.32 (Hatier 90 p 33)

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
1 def V(n):
2     t=4
3     for k in range(n):
4         t=2*t-5
5     return t
```

- Quelle est la valeur de v_0 ?
- Proposer une forme récurrente de la suite (v_n) .
- Déterminer la valeur de v_3 .

Exercice 1.33 (64 p 88)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et l'algorithme ci-contre permettant de créer la liste des termes de la suite de u_0 à u_n . On considère $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Déterminer ce que contient la variable L en fin d'algorithme pour $n = 4$.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

```
U ← 3
L ← [U]
Pour i variant de 1 à n
    U ← f(U)
    L ← L + [U]
Fin Pour
```

Exercice 1.34 (73 p 88)

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$.

1. Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable S contienne la somme $v_0 + \dots + v_N$ en fin d'algorithme.

```
V ← 4
S ← 4
Pour i variant de 1 à N
    V ← V + 1/V
    S ← S + V
Fin Pour
```

2. Écrire une fonction Python de

paramètre N qui retourne la somme $v_0 + \dots + v_N$.

Exercice 1.35 (Hatier 76 p 32)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où :

$$f(x) = 0,5x(4 - x) + 2.$$

- Expliciter la relation entre u_{n+1} et u_n .
- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Conjecturer la valeur de u_{2020} .

Exercice 1.36 (Hatier 77 p 32)

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 4$ et, pour tout

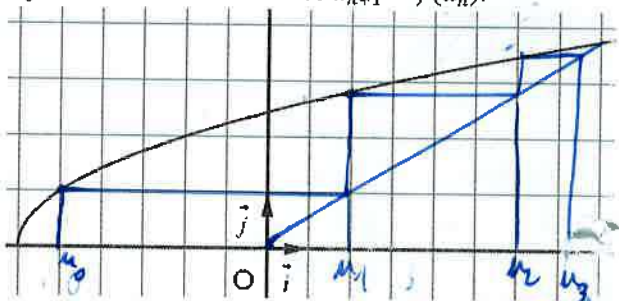
nombre entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{2v_n - 5}{4}$.

- Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
- Donner une expression de la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

Exercice 1.37

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[-6; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Construire les premiers termes de la suite (u_n) avec :

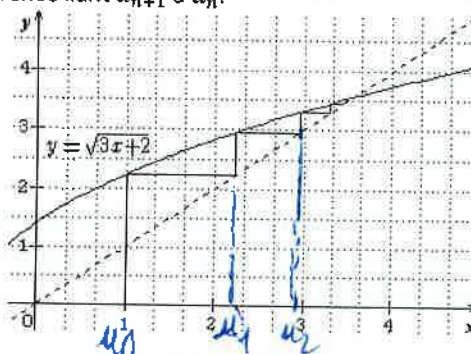
- a. $u_0 = -5$;
- b. $u_0 = 8$.

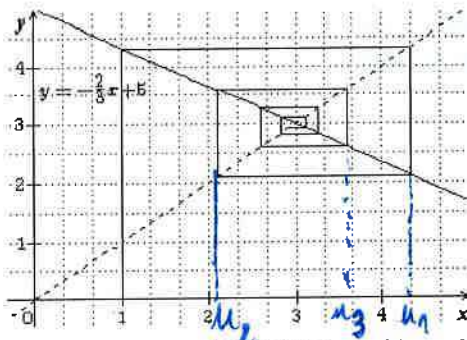
Dans chaque cas décrire le comportement de la suite : les termes augmentent-ils ou diminuent-ils ? La suite semble-t-elle avoir une limite ?

- 2. Quelle est la particularité de la suite lorsqu'on choisit $u_0 = 3$?

Exercice 1.38

Sur les figures suivantes on a représenté les termes d'une suite définie par récurrence. Par lecture graphique donner les trois premiers termes de chaque suite et la relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n .





Dans chaque cas, donner par lecture graphique, les trois premiers termes de la suite, une relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n et conjecturer la limite de (u_n) .

Exercice 1. 39 (65 p 88)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1 \text{ et } u_0 = -2.$$

1. Écrire une fonction Python de paramètre n qui retourne la liste des n premiers termes de la suite (u_n) .

2. Émettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .

Exercice 1. 40 (67 p 88)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et la relation $u_{n+1} = 3u_n + 7$ pour tout entier naturel n .

Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle retourne le plus petit entier p tel que $u_p > 1\,000$.

```
def seuil():
    A=15
    N=0
    while A<=1000:
        N=N+1
        A=3*A+7
    return (N)
```

Exercice 1. 41 (CQFD 41 p 66)

A l'aide d'un programme Python déterminer le premier entier naturel n tel que $u_n > 5$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,02u_n$.

Exercice 1. 42 (CQFD 42 p 66)

A l'aide d'un programme Python déterminer le premier entier naturel n tel que $-0,1 < u_n < 0,1$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = -5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,3u_n$.

Exercice 1. 43 (Hatier 150 p 39)

1. a. Tracer un rectangle de dimensions 15 cm $\times$ 3 cm et calculer son aire.

b. Tracer un nouveau rectangle dont la longueur est égale à la moyenne des dimensions précédentes et ayant la même aire.

c. Appliquer le même processus pour tracer un nouveau rectangle.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) , où a_n représente la longueur et b_n la largeur d'un rectangle tracé comme à la question 1.

a. Expliquer les définitions suivantes :

$$a_0 = 15, b_0 = 3 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{45}{a_{n+1}}.$$

b. Que valent a_1 , b_1 , a_2 et b_2 ?

c. À l'aide d'un outil logiciel, déterminer les valeurs de

a_6 et b_6 .

d. Pourquoi a-t-on $a_6 \approx b_6$?

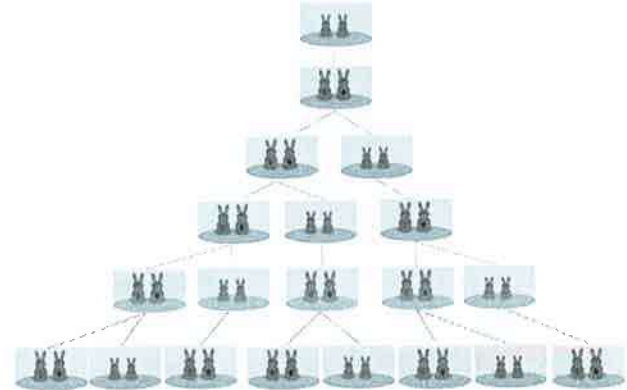
Exercice 1. 44

1. La suite de Fibonacci est la suite définie par récurrence à partir des deux premiers termes $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Calculer F_3 , F_4 et F_5 .

2. La suite de Fibonacci viendrait de l'histoire suivante :

- Le premier mois on possède un couple de lapereaux.
- Le mois suivant ces lapereaux deviennent adultes et peuvent engendrer un couple de lapereaux le mois suivant.
- Le troisième mois, le couple de lapin donne naissance à un couple de lapereaux qui agira de la même façon.



a. Justifier que les nombres de lapins obtenus constituent les termes de la suite de Fibonacci.

b. Déterminer F_{12} et interpréter dans le contexte.

3. Le nombre d'or est défini en géométrie comme le rapport entre deux longueurs telles que le rapport de la somme des deux longueurs sur la plus grande, soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite, ie : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ avec $a > b > 0$. Ce nombre, noté φ est l'unique solution de l'équation $x^2 = x + 1$ et vaut $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

a. Dans un tableur recopier la feuille de calculs ci-dessous.

	A	B	C	D
1	n	F_n	F_{n+1}/F_n	
2	0	1		
3	1	1		
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			

b. Dans la colonne B calculer les premiers termes de la suite de Fibonacci.

c. Pour tout entier naturel n on note $Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Dans la colonne C calculer les premiers termes de la suite (Q_n) . Conjecturer alors son comportement quand n tend vers $+\infty$.

Dans la cellule D1, déterminer une valeur approchée du nombre φ . Que peut-on constater ?

Exercice 1. 45

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite (u_n) , appelée **suite de Syracuse**, définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a. Calculer les 10 premiers termes de la suite de Syracuse obtenue pour $a = 1$.
- b. Choisir un entier entre 2 et 6 et calculer les 10 premiers termes de la suite de Syracuse obtenue.
- c. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. a. Copier le script ci-dessous dans l'éditeur Python.

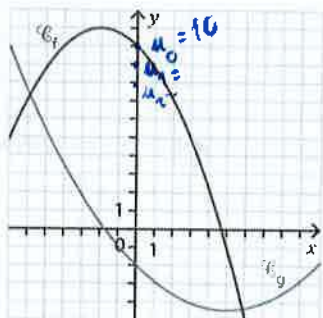
```
1- def syracuse(u) :
2-     if u%2==0 :
3-         u=u/2
4-     else :
5-         u=3*u+1
6-     return(u)
7-
8- def liste_syracuse(u) :
9-     L=[u]
10-    while u!=1 :
11-        u=syracuse(u)
12-        L=L+[u]
13-    return(L)
```

- b. Que renvoie `syracuse(6)` ? Par `syracuse(7)` ?

- c. A quel test correspond `u%2==0` ?
 - d. Quel est le rôle de la fonction `syracuse` ?
 3. a. Que retourne l'instruction `liste_syracuse(a)` où a est un entier non nul ?
 - b. Rechercher ce qu'on appelle la « conjecture de Syracuse » et pourquoi elle porte ce nom.
 - c. Choisir quatre entiers non nuls quelconques et utiliser la fonction `liste-syracuse`. Les résultats obtenus corroborent-ils la conjecture de Syracuse ?
 4. On appelle **temps de vol** d'une suite de Syracuse l'indice du premier terme de la suite qui vaut 1. On appelle **altitude** de vol de la suite la valeur du plus grand terme de la suite.
 - a. Si $u_0 = 7$, quelle est la durée de vol de la suite et quelle est son altitude ?
 - b. Ecrire un programme qui détermine la plus petite valeur de u_0 qui donne un temps de vol supérieur à 100.
 - c. Quelle est alors l'altitude de ce vol ?
- Déterminer deux autres valeurs de u_0 qui donnent la même altitude.

3 Déterminer le sens de variation d'une suite**Exercice 1. 46** (Barbazo 38 p 33)

On a représenté graphiquement ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g .

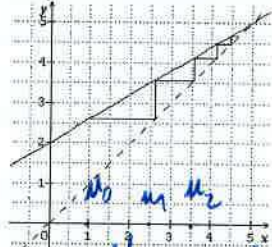
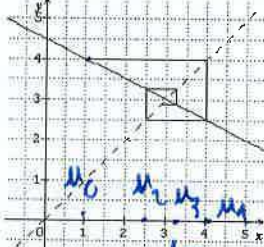


- Conjecturer graphiquement le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ pour tout entier naturel n .

Exercice 1. 47

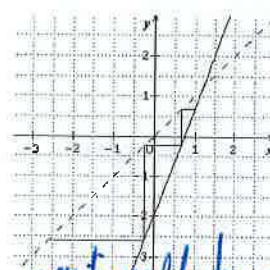
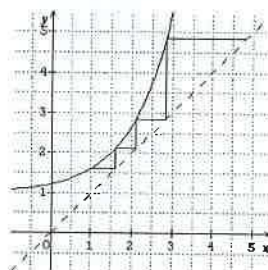
Dans un repère orthogonal, on a représenté graphiquement la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$. Dans chacun des cas, déterminer si la suite (u_n) semble converger. Lorsque c'est le cas préciser sa limite.



suite non monotone mais convergente vers 3

semble croissante et converge vers 5

**Exercice 1. 48** (Hatier 135 p 38)

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

1. Pour chacune des valeurs de u_0 suivantes, déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- a. $u_0 = 1$ b. $u_0 = 0$ c. $u_0 = -1$
2. Dans chacun des cas précédents, conjecturer les variations de la suite (u_n) .

Exercice 1. 49

A l'aide d'une différence de termes déterminer les variations de la suite (u_n) .

- a. $u_n = n^2 - 8n + 16$
- b. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1}$
- c. $u_n = 4^{n+1} - 4^n$
- d. $u_n = -\frac{4}{n^2}$
- e. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- f. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3n^2 + u_n$
- g. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n}$

- h. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$
 i. $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 9$

Exercice 1. 50

A l'aide d'un quotient de termes déterminer les variations de la suite (u_n) , supposée strictement positive.

- a. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 70
 b. $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ 70
 c. $u_n = \frac{4n}{2^n}$
 d. $u_0 = 32$ et $u_{n+1} = 0,24u_n$
 e. $u_1 = 17$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
 f. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{n+4}{2n+1}u_n$

Exercice 1. 51

A l'aide d'une fonction déterminer les variations de la suite (u_n) .

- a. $u_n = 3n - \frac{1}{2}$
 b. $u_n = -n^2 + 10n + 1$
 c. $u_n = \sqrt{2n+1}$
 d. $u_n = 1 - \frac{2}{n}$

Exercice 1. 52 (Déclic 52 p 157)

Pour chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ (sauf mention du contraire) :

- ① conjecturer, à l'aide de la calculatrice, son sens de variations ;
 ② démontrer cette conjecture en utilisant la méthode la plus adaptée.

1. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ 2. $v_n = 4^{2n}$
 3. $w_n = 3 + 0,5^n$ 4. $t_n = \frac{n}{3^n}$
 5. $k_n = \frac{5}{n^3} - 4 \ (n \geq 1)$ 6. $\begin{cases} \ell_0 = 2 \\ \ell_{n+1} = \ell_n - \frac{1}{n^2 + 1} \end{cases}$

Exercice 1. 53 (Déclic 91 p 161)

Le tableau ci-dessous indique le taux de français possesseurs d'un smartphone entre 2012 et 2017.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Taux (en %)	28	39	46	58	65	73

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = -0,298n^2 + 10,512n + 27,93$$

On admet qu'elle permet d'obtenir une bonne modélisation de ce taux d'équipement pour l'année 2012 + n .

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (t_n) et les comparer aux taux réels.
 2. Étudier les variations de la suite (t_n) . Ce modèle est-il réaliste sur le long terme. Expliquer.
 3. A l'aide de la calculatrice, indiquer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, on peut estimer que le taux personnes possesseurs d'un smartphone dépassera 95 %.

Exercice 1. 54 (Belin 80 p 168)

Une entreprise fabrique des tablettes tactiles. Il a fallu investir 950 000 € pour la recherche et la mise en place de l'unité de production. La fabrication de chaque tablette engendre une dépense de 80 €.

On note n le nombre de tablettes fabriquées et C_n le coût total de fabrication de ces n tablettes.

1. Calculer $C_1, C_{10}, C_{10\,000}$, et plus généralement calculer C_n en fonction de n .

2. On note $f_n = \frac{C_n}{n}$ le coût moyen de fabrication de n tablettes : calculer f_n en fonction de n .

Déterminer $f_1, f_{10}, f_{10\,000}$.

3. Soit (f_n) la suite des coûts moyens de fabrication. Étudier les variations de la suite (f_n) .

4. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer le nombre de tablettes à partir duquel le coût moyen de fabrication est inférieur à 1 000 €.

Exercice 1. 55 (Belin 79 p 168)

On veut étudier l'évolution d'une population de coccinelles, dont on admet que le nombre d'individus reste inférieur à un million.

L'effectif des coccinelles pour l'année n est exprimé en millions d'individus par un nombre réel u_n (u_n est alors compris entre 0 et 1). Si pour l'année 0, il y a 400 000 coccinelles, alors $u_0 = 0,4$.

On admet que l'évolution d'une année à l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie par $f(x) = kx(1-x)$, où k est un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).

1. On suppose que $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

- a. Afficher, avec une calculatrice, les dix premiers termes de la suite.

- b. Démontrer que la suite est décroissante. On admet que tous ses termes restent positifs.

2. a. Écrire un algorithme qui permet d'obtenir le terme de rang n de la suite (u_n) .

3. p désigne un entier naturel non nul que l'on peut choisir. Écrire un algorithme qui donne, en fonction de p , la plus petite valeur n_0 telle que, pour tout n supérieur à n_0 , $u_n < 10^{-p}$.

4. Application : Implémenter les algorithmes des questions précédentes en Python. Avec ce modèle, en combien d'années, ne resterait-il plus qu'une coccinelle ?

Exercice 1. 56 (Hatier 141 p 38)

On considère la suite (w_n) définie par $w_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = (n+1) \times w_n$.

On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n > 0$.

- a. À l'aide de la méthode la plus appropriée, déterminer la monotonie de la suite (w_n) .

- b. PROGRAMMATION python

Écrire une fonction en Python de paramètre n qui renvoie la valeur de w_n .

Exercice 1. 57 (Hatier 143 p 38)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on pose :

$$s_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Calculer s_1 , s_2 et s_3 .
- Démontrer que la suite (s_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
- Pour tout nombre entier $k \geq 1$, justifier que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

- En déduire une expression simple de s_n .

Exercice 1. 58 (Déclic 88 p 160)

Vrai ou faux ? Justifier.

- Si une suite u est décroissante alors $u_1 \geq u_5$.
- Si une suite v est décroissante alors, pour tout rang n , on a $v_n \leq v_0$.
- Soit une suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
Si u est croissante alors f est croissante.
- Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et, pour tout entier n , $v_{n+1} = g(v_n)$ où g est définie par $g(x) = x - 4$.
- La suite v est croissante

Exercice 1. 59 (Hatier 130 p 37)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

- Démontrer que si les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors la suite $(u_n + v_n)$ est croissante.
- Les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont définies sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \frac{n-5}{n}$, $b_n = \frac{n+3}{n}$ et $c_n = \frac{n+8}{n}$.
a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante et que les suites (b_n) et (c_n) sont décroissantes.
b. Prouver que la suite $(a_n + b_n)$ est croissante.
c. Prouver que la suite $(a_n + c_n)$ est décroissante.
- Si la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, alors peut-on donner le sens de variation de la suite $(u_n + v_n)$?

Exercice 1. 60 (Hatier 131 p 37)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et strictement croissante.

- Déterminer le sens de variation de la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2,8 \times u_n$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = -3,4 \times u_n$.
- Soit k un nombre réel. Recopier et compléter chacune des propriétés suivantes, puis la démontrer.
 - « Si k est ... et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. »
 - « Si k est ... et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. »

Exercice 1. 61 (Hatier 132 p 37)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes sont strictement positifs.

- Démontrer la propriété suivante.

« Si (u_n) est strictement croissante, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est strictement décroissante. »

Exercice 1. 62

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

La courbe C_f tracée dans le repère donné ci-dessous est celle de la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par :

$$f(x) = \frac{9}{6-x}.$$

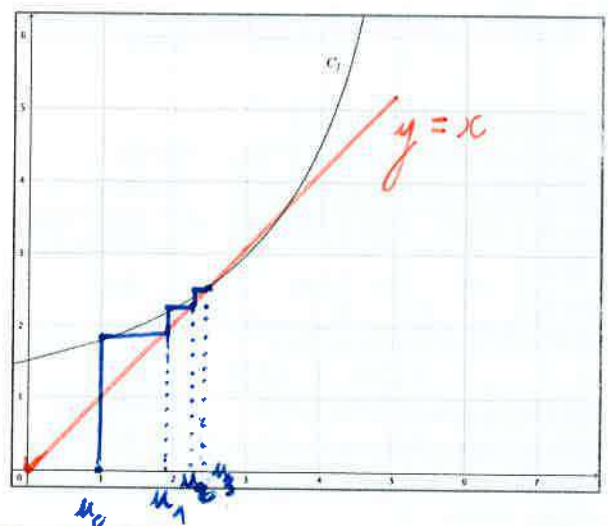
- A l'aide du graphique représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) . *qu'est-ce qu'on observe*
 - Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?
- Calculer u_1 et u_2 .
- On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.
a. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}.$$
 - En déduire le sens de variation de (u_n) .
 - Compléter la fonction suivante, écrite en Python, renvoyant le premier entier n tel que $u_n \geq 2,99$.

```

1 def seuil():
2     u=1
3     n=0
4     while ...:
5         n+=1
6         u=9/(6-u)
7     return(n)

```

u <= 2.99

**Exercice 1. 63**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
4. A l'aide de la calculatrice déterminer le premier entier naturel n tel que $u_n > 0,4$.

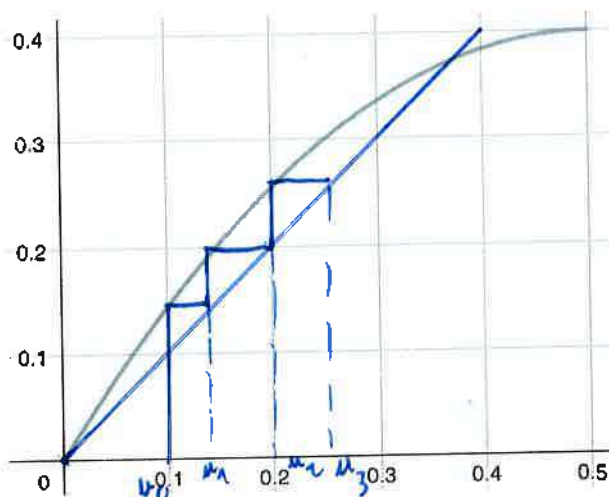
Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ?

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
 - a. Montrer que f est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$.
 - b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $[0; \frac{1}{2}]$. On appelle α la solution non nulle de cette équation.
 - c. A l'aide de la courbe représentative de f donnée dans le repère ci-dessous, représenter les quatre premiers termes de la suite (v_n) .



- d. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (v_n) .
3. Soit g la fonction définie sur $[0; \alpha]$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$
 - a. Étudier le sens de variation de g sur $[0; \alpha]$.
 - b. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq \alpha$.

Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

4. On donne ci-dessous la fonction seuil écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

- a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
- b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35). Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 1.64

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans l'exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes :

cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie. On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la manière suivante : $p_0 = 0,3$ et pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées des termes de la suite (p_n) .

	A	B
1	n	p_n
2	0	0.3
3	1	
4	2	
5	3	0.40769562
6	4	0.416351
7	5	0.42134371
8	6	0.42427137
9	7	0.42600433
10	8	0.42703578
11	9	0.42765169
12	10	0.42802018
13	11	0.42824089
14	12	0.42837313
15	13	0.42845251
16	14	0.42850009
17	15	0.42852863
18	16	0.42854575
19	17	0.42855602

- a. Quelle formule à recopier vers le bas, peut-on saisir en B3 pour calculer les termes de la suite (p_n) ?
- b. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 .
- c. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir

d'une bactérie de ce type ?

d. Formuler les conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

2. a. Etudier le signe du trinôme $0,7x^2 - x + 0,3$ sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq p_n \leq 0,5.$$

En déduire le sens de variation de la suite (p_n) .

3. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

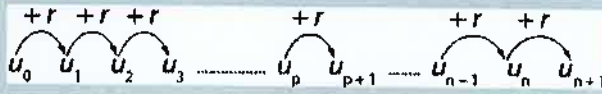
```
1 def suite(n):  
2     p=...  
3     s=[p]  
4     for i in range(.):  
5         p=...  
6         s.append(p)  
7     return(s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la suite(n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) .

2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 2. 1*suite arithmétique*

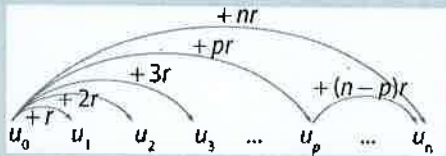
Une suite (u_n) est dite arithmétique si on passe d'un terme quelconque au suivant en ajoutant toujours le même nombre, c'est à dire s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n) .



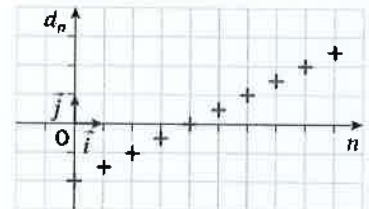
Dans la suite du cours (u_n) désigne une suite arithmétique de raison r .

Propriété 2. 1*expression de u_n en fct de n*

- Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$: $u_n = u_p + (n - p)r$.
- En particulier si u_0 est le premier terme de (u_n) alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_0 + nr$.

**Remarque**

- La réciproque est vraie : s'il existe r tel que pour tout entier n , $u_n = an + b$ alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.
- Si f est la fonction affine définie par $f(x) = rx + u_0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Ainsi, dans un repère, tous les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont alignés.

**Propriété 2. 2***sens de variation*

- si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante
- si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante

Propriété 2. 3*somme de termes*

- La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- La somme des termes d'indice 0 à n de la suite (u_n) est :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$
- La somme des termes d'indice p à n de la suite (u_n) est :

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

Remarque : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 2. 1

Parmi les suites suivantes déterminer celles qui sont arithmétiques et préciser, dans ce cas, leurs éléments caractéristiques (premier terme et raison).

- | | |
|-------------------|--|
| a. $u_n = 5n - 2$ | c. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -5 + u_n \end{cases}$ |
| b. $u_n = n^2$ | d. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ |

Exemple 2. 2

Dans chacun des cas suivants (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{12} et u_{30} .

Existe-il un entier n tel que $u_n = 144$?

- $u_0 = -8$; $r = 2$.
- $u_5 = -2$; $r = -3$.

Exemple 2. 3

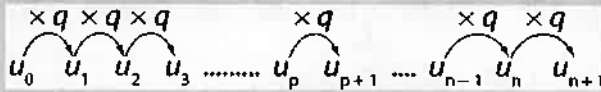
La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 , telle que $u_1 + u_5 = 1$ et $u_2 + u_3 = 2$. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exemple 2. 4

Calculer la somme des 100 premiers termes de la suite définie dans l'exemple précédent.

Définition 2.2*suite géométrique*

Une suite (u_n) est dite géométrique si on passe d'un terme quelconque au suivant en multipliant toujours par le même nombre, c'est à dire s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times q$. Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n) .

**Exemple 2.5**

Parmi les suites suivantes préciser celles qui sont des suites géométriques et préciser, dans ce cas, leurs éléments caractéristiques (premier terme et raison).

a. $u_n = 2 \times 3^n$

b. $u_n = n^2$

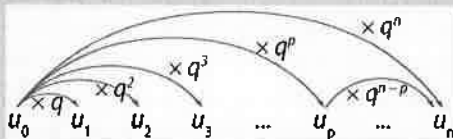
c. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3} \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

Dans la suite du cours (u_n) désigne une suite géométrique de raison q .

Propriété 2.4*expression de u_n en fct de n*

- Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- En particulier si u_0 est le premier terme de (u_n) alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

**Exemple 2.6**

Dans chacun des cas suivants (u_n) est une suite géométrique de raison q . Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_4 et u_7 .

a. $u_0 = 3$; $q = -2$.

b. $u_1 = 1$; $q = 3$.

c. $u_2 = -3$; $q = -2$.

Remarque : La réciproque est vraie : s'il existe q tel que pour tout entier n , $u_n = a \times q^n$ alors (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a$.

Propriété 2.5*sens de variation de (q^n)*

- $q > 1 \Rightarrow (q^n)$ croissante ;
- $0 < q < 1 \Rightarrow (q^n)$ décroissante
- $q < 0 \Rightarrow (q^n)$ non monotone
- $q = 0$ ou $q = 1 \Rightarrow (q^n)$ constante

Exemple 2.7

Etudier les variations de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q .

a. $q = 2$; $u_0 = 3$

b. $q = -2$; $u_0 = 0,5$

c. $q = 0,5$; $u_0 = 3$

d. $q = 0,5$; $u_0 = -3$

Remarque

- Si le premier terme de la suite (u_n) est positif alors (u_n) et (q^n) ont le même sens de variation.
- Si le premier terme de la suite (u_n) est négatif alors (u_n) et (q^n) ont des variations contraires.

Propriété 2.6*somme de termes*

On suppose que $q \neq 1$.

- La somme des $n+1$ premières puissances de q est :

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

- La somme des termes d'indice 0 à n de la suite (u_n) est

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

- La somme des termes d'indice p à n de la suite (u_n) est

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Exemple 2.8

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 4^n$.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et

exprimer $\sum_{i=1}^n u_i$ en fonction de n .

2. Soit (v_n) la suite de terme général $u_n = (-3)^n$.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et

exprimer $\sum_{i=0}^{n+1} u_i$.

Remarque : La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par : 1^{er} terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

D1 Calcul du terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1. Vérifier successivement les égalités suivantes : $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$ et $u_3 = u_0 + 3r$.

On pourrait généraliser ces premiers exemples mais la démonstration de cette généralisation nécessite un type de raisonnement vu en Terminale. Il est proposé ici une autre démonstration reposant sur un théorème admis.

2. Soit n un entier naturel. On pose : $v_n = u_0 + nr$. Le but est de démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = v_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. On admet le résultat suivant : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme v_0 et par $v_{n+1} = f(v_n)$ est unique.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$.

CORRIGÉ

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Si $n=0$, alors $u_1 = u_0 + r$. Si $n=1$, alors $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$.

Si $n=2$, alors $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$.

2. a. $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = (u_0 + nr) + r = v_n + r$.

b. On a $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$. Donc les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

Soit n un entier naturel. D'après la question 2. a., on a $v_{n+1} = v_n + r$. Donc $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + r$.

On a aussi, par hypothèse, $u_{n+1} = u_n + r = f(u_n)$ car (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Donc on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_0 = u_0$.

D'après le résultat admis, par unicité, on a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = v_n$.

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

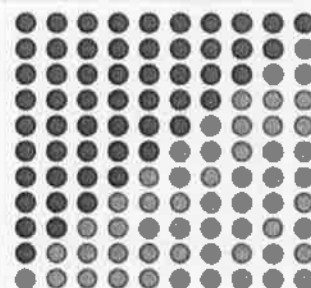
D2 Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.**1. Étude de quelques cas particuliers avant la démonstration**

a. Dans la figure ci-contre, en comptant le nombre de jetons rouges de deux manières différentes, montrer que : $1 + 2 + \dots + 10 = 55$.

b. Par un raisonnement similaire, déterminer la valeur de $1 + 2 + \dots + 100$.

2. Démonstration du cas général

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 1., calculer $1 + 2 + \dots + n$.

**CORRIGÉ**

1. a. Sur la figure de l'énoncé, en partant de la droite et en comptant les jetons rouges par colonne, on trouve qu'il y a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ jetons rouges.

L'ensemble des jetons (rouges ou bleus) forme un rectangle de 10 colonnes et 11 lignes : il y a donc 10×11 jetons au total. De plus, par symétrie, il y a autant de jetons rouges que de bleus, donc il y a $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ jetons rouges. Donc $1 + 2 + \dots + 10 = 55$.

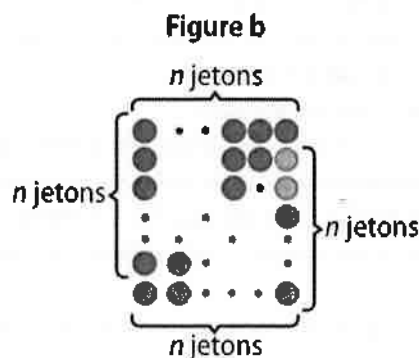
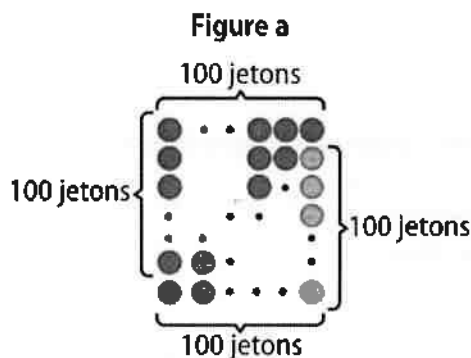
b. En adaptant la figure de l'énoncé pour 100 jetons (voir Figure a ci-après), en comptant par colonne, on trouve qu'il y a $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ jetons rouges.

L'ensemble des jetons forme un rectangle de 100 colonnes et 101 lignes : il y a donc 100×101 jetons au total. Comme il y a autant de jetons rouges que de bleus, il y a $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ jetons rouges. Donc $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$.

2. En adaptant la figure de l'énoncé pour n jetons (voir Figure b, ci-dessous), on trouve, en comptant par colonne, qu'il y a $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jetons rouges.

De plus, les jetons bleus et rouges forment un rectangle de $n \times (n+1)$ jetons, donc il y a $\frac{n \times (n+1)}{2}$ jetons rouges.

$$\text{Donc } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



D3 Calcul du terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

Soit n un entier naturel. On pose : $v_n = q^n u_0$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. On admet le résultat suivant : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme v_0 et par $v_{n+1} = f(v_n)$ est unique.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = q^n u_0$.

CORRIGÉ

a. $v_{n+1} = q^{n+1} u_0 = q \times q^n u_0 = q \times v_n$.

b. On a $v_0 = q^0 u_0 = u_0$. Donc les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

Soit n un entier naturel. D'après la question a., on a $v_{n+1} = q v_n$. Donc $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = qx$.

On a aussi, par hypothèse : $u_{n+1} = q u_n = f(u_n)$ car (u_n) est une suite géométrique de raison q .

Donc on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_0 = u_0$.

D'après le résultat admis, par unicité, on a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = v_n$.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

D4 Calcul de $1 + q + \dots + q^n$

Soit q un réel différent de 1 et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Posons : $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

a. Montrer que $S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$.

b. En déduire que $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

a. $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ et $q S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$.

On soustrait les deux égalités membre à membre et on regroupe les termes opposés :

$$S_n - q S_n = 1 + (q - q) + (q^2 - q^2) + (q^3 - q^3) + \dots + (q^n - q^n) - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

b. $S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$ donc $(1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$.

Puisque $q \neq 1$, on obtient : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

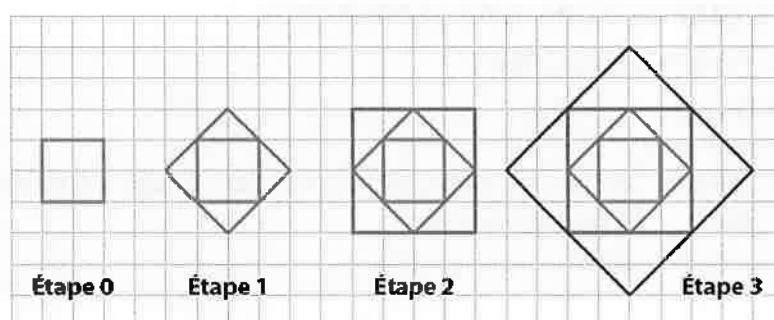
Activité 1 : introduire la notion de suite arithmétique

On a peut-être découvert du pétrole au large du Brésil ! Une compagnie nationale d'hydrocarbures a mandaté une société de forage pour atteindre la nappe potentielle. La plateforme d'exploration coûte 10 million d'euros. Le coût du forage est fixé à 0,1 millions d'euros par mètre creusé. On pose pour tout entier naturel n non nul p_n le coût en millions d'euros pour creuser n mètres. On a donc $p_0 = 10$ et $p_1 = 10,1$.

1. Donner les valeurs de p_2 et p_3 . Que représentent-elles ?
2. Déterminer les valeurs de $p_{15} - p_{14}$ et $p_{16} - p_{15}$.
3. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
4. Pour attirer les investisseurs, le gouvernement brésilien décide de prendre à sa charge le coût de la plateforme. La société de forage n'assumera donc que les coûts liés à la main d'œuvre.
Quelle somme déboursa-t-elle pour forer 3 999 m ? Et pour forer n mètres ?
5. Dédurre de la question précédente l'expression de p_n en fonction de n .

Activité 2 : introduire la notion de suite géométrique

Ulysse cherche à construire des figures sur une feuille à petits carreaux standards. En partant d'un carré simple, il en crée un nouveau dont les milieux des côtés sont les sommets du carré précédent, et ainsi de suite, selon le schéma ci-dessous.



On choisit un petit carreau comme unité d'aire la suite de tout l'exercice.

1. a. Donner l'aire du carré à l'étape 0.
b. Montrer sans calcul que l'aire à l'étape 1 est 8.
c. Déterminer l'aire des nouveaux carrés obtenus aux étapes 2 et 3.
2. Pour tout entier naturel n , on appelle u_n la valeur de l'aire du carré à l'étape n . Ainsi $u_0 = 4$. Donner les trois termes suivants de la suite (u_n) .
3. Conjecturer une relation entre les termes u_{n+1} et u_n .
4. Une telle suite est appelée suite géométrique. La raison de cette suite est le nombre par lequel on multiplie un terme donné pour passer au terme suivant de la suite.
a. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
- b. Utiliser la formule précédente pour calculer u_{33} .
5. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'après exécution, la variable N contienne le nombre d'étapes nécessaires pour que l'aire du carré soit égale à 1 024.

```

A ← ...
N ← ...
Tant que .....
| A ← ...
| N ← ...
Fin Tant que
  
```

1 Suite arithmétique

Exercice 2. 1 (75 p 89)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 13$ et de raison $r = -5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le quinzième terme de cette suite.
2. Étudier les variations de (u_n) .
3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$.

Exercice 2. 2 (83 p 90)

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_1 = 5$.

1. Déterminer le treizième terme de la suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
3. À partir de quel rang les termes u_n sont-ils supérieurs à 1 000 ?
4. Pour quelles valeurs de n le terme u_n est-il compris entre 500 et 1 000 ?

Exercice 2. 3 (77 p 90)

Les suites ci-dessous sont définies sur $\mathbb{N}$. Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant. Pour tout entier naturel n :

- a. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_0 = -1 \end{cases}$
- b. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n \\ u_0 = 2 \end{cases}$
- c. $u_n = -5n + 3$
- d. $u_n = n^2 - 2n + 1$

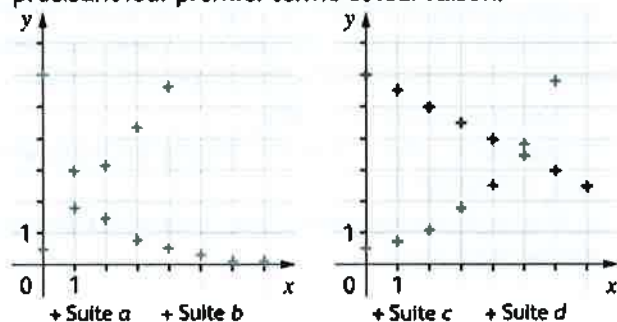
Exercice 2. 4

Dans chaque cas préciser si la suite (u_n) est arithmétique. Lorsqu'elle l'est, préciser sa raison et son premier terme.

- a. $u_n = -4n + 6n^2$
- b. $u_n = -4n + 5$
- c. $\begin{cases} u_{n+1} = 6 + u_n \\ u_0 = 3 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{u_n} + 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}$

Exercice 2. 5 (Déclic 61 p 159)

Parmi les quatre suites a , b , c et d représentées ci-dessous, indiquer celles qui sont arithmétiques en précisant leur premier terme et leur raison.



Exercice 2. 6 (Déclic 107 p 163)

On considère la suite arithmétique (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$, telle que $u_{12} = 52$ et $u_{23} = 107$.

1. Calculer la raison r de la suite.
2. Calculer le terme initial u_0 .
3. Calculer u_{55} .
4. Déterminer le sens de variation de la suite.
5. Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Exercice 2. 7 (88 p 91)

Compléter l'algorithme ci-contre pour que la liste L contienne en fin d'algorithme, les termes $u_0, u_1, \dots, u_N$ d'une suite arithmétique de raison r .

```

U ← u₀
L ← [...]
Pour i variant de ... à ...
    U ← ...
    L ← ... + [...]
Fin Pour

```

Exercice 2. 8 (79 p 90)

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 12$ et de raison 7. On a créé la feuille de calcul ci-contre. La valeur de u_0 est entrée dans la cellule B2.

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	0	12	12
3	1	19	
4	2	26	
5	3	33	

1. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?
2. La valeur de u_0 est entrée dans la cellule C2. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule C3 pour obtenir la somme $u_0 + \dots + u_n$ pour chaque valeur de n ?

Exercice 2. 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

1. a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- b. Cette suite est-elle arithmétique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - a. Déterminer les trois premiers termes de (v_n) .
 - b. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
3. a. Exprimer $v_0 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de n .
- b. Exprimer $v_0 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de u_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2. 10 (CQFD 75 p 70)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$

et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

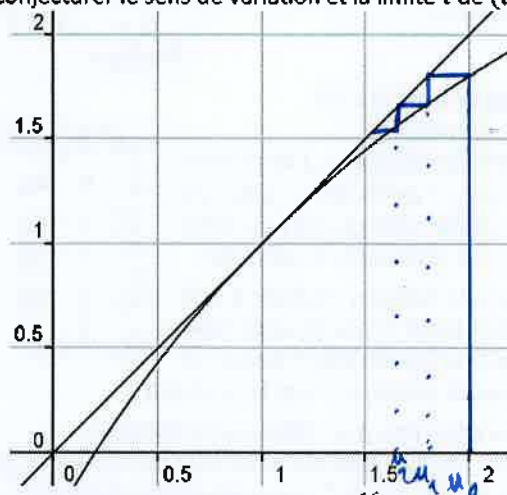
On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{6}$.
 - b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$.
 - d. En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier n .
4. Déterminer une expression de u_{100} .

Exercice 2. 11

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

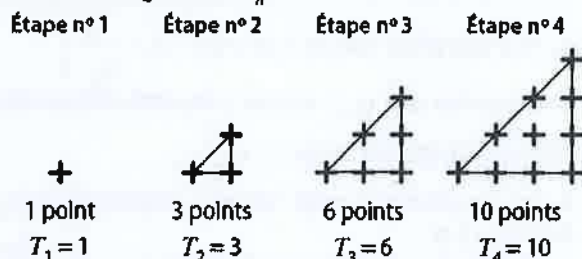
- Sur le graphique ci-dessous on a représenté la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$.
- Représenter les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- Conjecturer le sens de variation et la limite l de (u_n) .



- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$.
- Montrer, que si $1 < u_n \leq 2$ alors $1 < u_{n+1} \leq 2$.
Pour la suite de l'exercice on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n \leq 2$.
- Établir la relation $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.
 - En déduire le sens de variation de (u_n) .
- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Justifier l'existence de v_n pour tout entier n .
 - Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$.
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $|u_n - l| < 10^{-5}$.
 - Proposer un algorithme qui, pour un réel strictement positif ε en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 2. 12 (86 p 90)

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres triangulaires » T_n .



Ainsi T_4 est le quatrième nombre triangulaire et vaut 10. Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de points situés soit à l'intérieur soit au bord du triangle obtenu à la n -ième étape.

- Donner la valeur de T_5 et de T_6 .
- Construire les triangles des étapes n°5 et 6.
 - Justifier l'égalité $2 \times T_6 - 6 = 36$.
 - Sans faire la figure, justifier l'égalité $2 \times T_{20} - 20 = 20^2$.
 - Justifier que, pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Autre méthode : on appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par le nombre de points qu'on ajoute à la figure à l'étape n .

- Donner u_1, u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner ses caractéristiques.
- Exprimer T_n en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_n$. Retrouver le résultat de la question 2. d.

- 2019 est-il un nombre triangulaire ?

Exercice 2. 13 (84 p 90)

On veut creuser un puits. Le 1^{er} mètre coûte 100 €, le 2^e mètre 120 €, le 3^e mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. On note un le prix du n -ième mètre creusé.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$.
 - En déduire le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur.
- On dispose d'un budget de 33 000 €.

Quelle profondeur maximale du puits peut-on creuser ?

Exercice 2. 14 (85 p 90)

La croissance du fœtus est surveillée par échographie. Quand il est trop grand pour être visualisé complètement, on mesure le diamètre bipariétal (l'écartement entre les deux os qui se trouvent de chaque côté de la face).



On admet qu'à partir de la 11^e semaine, le diamètre bipariétal augmente chaque semaine de 2 mm et qu'il vaut 24 mm à la fin de la 11^e semaine. On note u_n sa valeur, exprimée en mm, à la fin de la $(n + 11)$ -ième semaine de grossesse.

- Donner u_0 . Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Au bout de combien de semaines, le diamètre bipariétal dépassera-t-il 5 cm ?

2 Suites géométriques

Exercice 2. 15 (89 p 90)

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n et calculer le dixième terme de cette suite.
2. Étudier les variations de (v_n) .
3. a. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \dots + v_8$.
b. Calculer la somme $S' = v_1 + v_2 + \dots + v_9$.

Exercice 2. 16 (Déclic, 64 p 158)

Pour chaque suite, indiquer si elle est géométrique (en précisant sa raison) ou non.

1. $u_n = 5n^2$
2. $v_n = 3 \times 4^n$
3. $w_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$
4. $\begin{cases} t_0 = -2 \\ t_{n+1} = t_n + 2^n \end{cases}$
5. $k_n = \frac{4 \times (-5)^n}{3}$
6. $\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = -3z_n \end{cases}$

Exercice 2. 17

Pour chaque suite dire si elle est géométrique (en précisant sa raison) ou non

- a. $u_n = 6n - 2n^2 + 1$
- b. $u_n = \frac{4}{3^n}$
- c. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n}{5} \\ u_0 = -1 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 3 \\ u_0 = 4 \end{cases}$

Exercice 2. 18 (Déclic, 120 p 164)

Soient u , a et b les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5 \times 2^n - 3n + 1, a_n = 5 \times 2^n \text{ et } b_n = -3n + 1$$

1. Quelle est la nature des suites a et b ? Justifier.
2. Calculer et exprimer en fonction de n les sommes $S_1 = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ et $S_2 = b_0 + b_1 + \dots + b_n$.
3. Calculer alors la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 2. 19 (lelivrescolaire 71 p 36)

Dans chaque cas, on considère deux termes d'une suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$.

Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_3 = 6$ et $v_8 = 1458$
2. $v_6 = -18$ et $v_{12} = -\frac{9}{32}$
3. $v_{10} = 15$ et $v_{15} = 46875$
4. $v_{21} = 65536$ et $v_{23} = 262144$

Exercice 2. 20 (95 p 90)

Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

1. a. Calculer les distances d_1, d_2 et d_3 .
b. Donner l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n .
c. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .

2. Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.

3. Justifier que $L_n < 5\,000$ pour tout n . Que dire du pari du globetrotter ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

Exercice 2. 21 (97 p 91)

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est de 1 013 hectopascals.

On suppose que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.

On note p_n la pression atmosphérique en hectopascals à l'altitude $100n$ en mètres. On a donc $p_0 = 1\,013$. On arrondira tous les résultats à l'unité.

1. Calculer les pressions p_1 et p_2 aux altitudes 100 et 200 m.
2. Écrire p_{n+1} en fonction de p_n pour tout entier naturel n . Que peut-on en déduire sur la suite (p_n) ?
3. Exprimer p_n en fonction de n .
4. Calculer la pression atmosphérique à l'altitude 3 200 m.
5. Calculer à partir de quelle altitude (à 100 m près) la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascals.

Exercice 2. 22 (100 p 91) algorithmique, somme

On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 7. Compléter le programme ci-contre afin que la fonction Python retourne la somme $u_0 + \dots + u_{100}$.

```
def suite_somme():
    2   U=5
    3   S=...
    4   for i in range(...):
    5       U=...
    6       S=...
    7   return(S)
```

Exercice 2. 23 (101 p 91) algorithmique, recherche de rang

La désintégration de l'atome de radium produit un gaz appelé radon qui, lui-même, se désintègre au cours du temps en perdant 16,5 % de sa masse chaque jour. On considère qu'au début de l'expérience, on dispose d'un gramme de radon. On désigne par u_n la masse de radon au bout du n -ième jour. On a donc $u_0 = 1$.



1. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
2. De quelle valeur semblent se rapprocher les termes u_n lorsque n devient grand ?
3. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle retourne le premier terme de la suite inférieur ou égal à 10^{-6} ainsi que l'indice de ce terme.

```
03_Indi~.py 008/008
def radon():
    u=1
    n=0
    while ...:
        u=...
        n=...
    return(n,u)
```

Exercice 2. 24 (119 p 100) *algorithmique, listes*

On considère des listes de nombres définies de la manière suivante :

Étape 0 $\rightarrow L_0 = (1)$

Étape 1 $\rightarrow L_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Étape 2 $\rightarrow L_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Étape 3 $\rightarrow L_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

On obtient chaque liste en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. a. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle la liste L_n contient plus de 2 020 éléments ?

b. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie le 2 020^e élément de L_n où n est l'entier déterminé à la question 1.a..

```
1 def list():
2     L=[1]
3     for k in range(...):
4         U=[i*0.5 for i in L]
5         L=L+...
6     return(L[...])
```

2. Pour tout entier naturel n , on appelle u_n le dernier élément de la liste L_n .

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n . Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

b. Que peut-on conjecturer sur la limite de (u_n) ?

Exercice 2. 25 (Sujet C p 99)

Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1 . Extérieurement au triangle OA_0A_1 , on construit sur le côté $[OA_1]$ un triangle OA_1A_2 rectangle isocèle en A_2 .

1. On pose $OA_0 = 1$. Démontrer

que : $OA_1 = A_0A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. On réitère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèles. Si $OA_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n , on trace alors extérieurement à celui-ci le triangle OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1} .

a. Déterminer une relation entre les longueurs OA_{n+1} et OA_n .

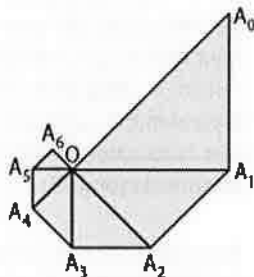
b. On pose pour tout entier naturel n , $u_n = OA_n$.

Déterminer la nature de la suite (u_n) et exprimer son terme général en fonction de n .

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée $OA_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ c'est-à-dire : $L_n = OA_0 + A_0A_1 + \dots + A_{n-1}A_n$.

a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n .

b. Conjecturer la limite de la suite (L_n) .

**Exercice 2. 26** (104 p 92)

Pour placer un capital de 5 000 €, on a le choix entre deux formules :

A. Formule de placement à prime constante : chaque année, le capital est augmenté de 250 €.

On appelle C_n le capital disponible après n années.



B. Formule de placement à taux d'intérêt fixe à 4 % par an : chaque année, le capital est augmenté de 4 % par rapport à l'année précédente. On appelle K_n le capital disponible après n années.

Répondre aux questions suivantes pour chacune des suites (C_n) et (K_n) .

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.

2. Exprimer le terme de rang $n + 1$ en fonction du terme de rang n . Que peut-on en déduire pour la suite ? Préciser la raison.

3. Donner l'expression en fonction de n du capital disponible après n années de placement.

4. Calculer le capital disponible après 6 années de placement.

5. Après combien d'années le capital aura-t-il doublé ? Cette durée dépend-elle du montant du capital initial ?

Exercice 2. 27

Un patron propose à ses employés, au choix de chacun, trois modes d'augmentation de leur salaire mensuel au premier janvier de chaque année :

Contrat A : une augmentation fixe du salaire mensuel de 50 €.

Contrat B : une augmentation de 3,5 % du salaire mensuel de l'année précédente.

Contrat C : une augmentation de 2 % du salaire mensuel de l'année précédente à la quelle s'ajoute une augmentation fixe de 20.

Au premier janvier 2002 le salaire mensuel des employés est de 1 200 €.

On note respectivement u_n , v_n et w_n les salaires mensuels des contrat A, B et C l'année 2002 + n .

Contrat A

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .

c. Exprimer u_n en fonction de n . En déduire le salaire mensuel en 2011.

d. Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .

En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.

2. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules B4 et C4 ? Compléter les colonnes B et C.

Contrat B

1. a. Calculer v_1 et v_2 .

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .

c. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire le salaire mensuel en 2011.

d. Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .

En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.

2. Quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules D4 et E4 ? Compléter les colonnes D et E.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Contrat A		Contrat B		Contrat C	
2	n	Salaire mensuel	Salaire cumulé	Salaire mensuel	Salaire cumulé	Salaire mensuel	Salaire cumulé
3	0	1 200	14 400	1 200	14 400	1 200	14 400

4	1						
5	2						
6	3						
7	4						
8	5						
9	6						
10	7						
11	8						
12	9						

Contrat C

- Calculer w_1 et w_2 .
 - La suite (w_n) peut-elle être arithmétique ? géométrique ?
 - Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n .
 - On définit la suite (t_n) en posant, pour tout entier naturel n , $t_n = w_n + 1000$.
Montrer que (t_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire l'expression de w_n en fonction de n , puis le salaire mensuel en 2011.
 - Exprimer le montant total des salaires versés du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2002 + n .
En déduire le montant total des salaires, du début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2011.
2. Quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas, faut-il entrer dans les cellules F4 et G4 ? Compléter les colonnes F et G.

Exercice 2. 28 (102 p 91) *suite arithmético-géométrique*
Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \text{ et } u_0 = 0.$$

- Calculer $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{100}$ dans un tableur.
 - Conjecturer la limite de (u_n) .
 - La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
- En exprimant v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n , démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Donner l'expression de v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. a. À l'aide d'un programme ou du tableur, calculer des termes de la suite (v_n) pour de grandes valeurs de n .
b. Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la suite (v_n) ? Cette deuxième conjecture semble-t-elle cohérente avec celle faite à la question 1. b. ?

Exercice 2. 29 (118 p 100) *suite arithmético-géométrique*

La bactérie *E. Coli* pourrait permettre de produire du bio-carburant par modification génétique. L'expérimentation montre que dans un milieu nutritif optimisé, la masse de bactéries augmente de 20 % par jour. On démarre la production avec 1 kilogramme de bactéries. Chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif et on prélève un échantillon de bactéries pour suivre la modification génétique. Ces opérations retirent 100 grammes de bactéries de la cuve. On souhaite produire 30 kilogrammes de bactéries.



1. On modélise l'évolution de la population de bactéries par une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n , u_n est la masse de bactéries en grammes n jours après le début de l'expérimentation.

- Donner u_0 .
 - Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
2. Écrire une fonction Python retournant le nombre de jours nécessaires pour atteindre l'objectif.
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 500$.
- Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Conjecturer la limite de (u_n) .
- Le modèle choisi vous paraît-il réaliste ?

Exercice 2. 30 (Déclic, 124 p 165) *suite homographique*
On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite et sa limite éventuelle.
- Calculer u_1 et u_2 . Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
- On admet que u est positive et on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2} \quad (*)$$

- Calculer les premiers termes de v puis conjecturer la nature de la suite v . Démontrer cette conjecture.
- En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{1-v_n} - 2$$

En déduire une expression de v_n en fonction de n . Justifier alors que u bien une suite convergente.

Exercice 2. 31 (lelivrescolaire 86 p 38)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

- Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.
b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
a. Calculer s_0, s_1 et s_2 . Que peut-on conjecturer ?
b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
- En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n .
- Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

- a. $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 b. $W_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

Exercice 2. 32

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Montrer que $v_0 = 1$.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c. En déduire que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n .

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Montrer que $w_0 = -1$.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c. En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$w_{n+1} = w_n + 2.$$

d. Exprimer w_n en fonction de n .

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. a. En utilisant la question précédente démontrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $u_n > 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2n-3}{2^{n+1}}.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

d. En utilisant la calculatrice déterminer le premier entier naturel n_0 à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ sont inférieurs à 0,01. Justifier.

e. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

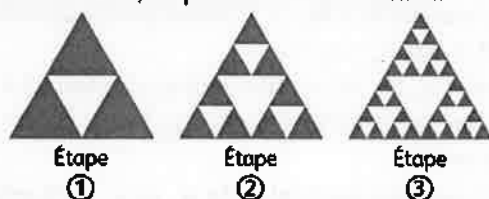
f. Proposer un algorithme demandant un réel $\varepsilon > 0$ en entrée et donnant en sortie le premier entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n < \varepsilon$.

Exercice 2. 33 (Déclic 136 p 169) triangles de Sierpinski

On partage un triangle équilatéral bleu, de 10 cm de côté, en quatre triangles équilatéraux en traçant les segments joignant les milieux des côtés de ce triangle. On blanchit le triangle central.

Chaque petit triangle bleu est alors partagé en quatre triangles selon la même procédure que précédemment et on blanchit le triangle central.

Et ainsi de suite, on poursuit la construction.



À l'étape n , où n est un entier non nul, on note :

- u_n le nombre de nouveaux triangles blanchis ;
- p_n le périmètre d'un nouveau triangle blanchi ;

- a_n l'aire d'un triangle blanchi.

On rappelle que :

- la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est égale $\frac{c\sqrt{3}}{2}$;

- lorsque des longueurs sont multipliées par un réel k , alors les aires sont multipliées par k^2 .

Partie A. Étude d'un nouveau triangle blanchi

1. Déterminer u_1 , p_1 et a_1 .

2. Comment obtenir u_2 , p_2 et a_2 à partir de u_1 , p_1 et a_1 ? puis u_3 , p_3 et a_3 à partir de u_2 , p_2 et a_2 ?

3. a. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_{n+1} en fonction de u_n , puis p_{n+1} en fonction de p_n et enfin a_{n+1} en fonction de a_n .

b. En déduire la nature de chacune des suites (u_n) , (p_n) et (a_n) .

c. Exprimer u_n , p_n puis a_n en fonction de n .

Partie B. Somme de périmètres

Pour tout entier $n \geq 1$, on note S_n la somme des périmètres des nouveaux triangles blanchis au cours de l'étape n .

1. Exprimer S_n en fonction de u_n et p_n .

2. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = 10 \times 1,5^n$$

3. À l'aide de la calculatrice :

a. déterminer à partir de quelle étape n la somme S_n dépasse 1 m, puis 10 km ;

b. conjecturer les limites éventuelles des suites (u_n) , (p_n) et (S_n) .

Partie C. Somme des aires

Pour tout entier $n \geq 1$, on note S'_n la somme des aires des nouveaux triangles blanchis au cours de l'étape n .

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S'_n = \frac{25\sqrt{3}}{4} \times 0,75^{n-1}$$

2. Quelle est la nature de la suite (S'_n) ?

3. Conjecturer la limite éventuelle de la suite (S'_n) .

4. Commenter les limites des suites (S_n) et (S'_n) .

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n la somme totale des aires de tous les triangles blanchis au cours des n étapes.

a. Intuitivement, vers quelle valeur tend la suite (T_n) ? Justifier.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$T_n = 25\sqrt{3}(1 - 0,75^n)$$

c. À l'aide de la calculatrice, retrouver la conjecture de la question 5. a.

Exercice 2. 34 (TS, Liban, mai 2019)

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n ième semaine ».

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2 .

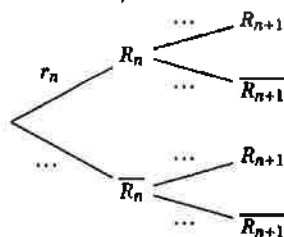
b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n ième semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

d. Calculer la limite de la suite (r_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2. 35 (TS, Liban, mai 2018)

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la n ième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

3 Second degré

1 Fonctions polynômes du second degré

Définition 3.1

fonction polynôme du 2nd degré

Une fonction polynôme du second degré (ou de degré 2) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression algébrique peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Remarque : On admet que l'écriture $ax^2 + bx + c$ est unique. Cette expression, appelée trinôme du second degré, est la forme développée de $f(x)$. Les réels a, b et c sont appelés coefficients de la fonction polynôme.

Propriété 3.1

forme canonique

Pour toute fonction polynôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, il existe deux nombres réels uniques α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Cette écriture est la forme canonique de f .

Remarque : le terme « canonique » qualifie l'expression censément naturelle, qui facilite les manipulations ultérieures. Elle permet en effet ici de démontrer rapidement les deux propriétés suivantes.

Exemple 3.2

- Donner la forme canonique des fonctions :
 - $f_1: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 8x + 9$;
 - $f_2: x \in \mathbb{R} \mapsto -2x^2 + 6x + 1$.
- Proposer un algorithme demandant trois réels a, b et $c, a \neq 0$ en entrée et retournant deux réels α et β tels que $a(x - \alpha)^2 + \beta$ soit la forme canonique de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété 3.2

variations

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré et $a(x - \alpha)^2 + \beta$ sa forme canonique.

Si $a \geq 0$: le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f		$f(\alpha) = \beta$	

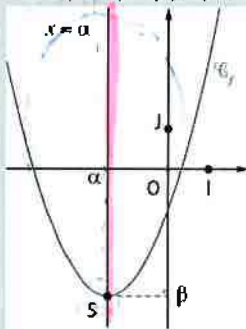
β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en α

Si $a \leq 0$: le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f		$f(\alpha) = \beta$	

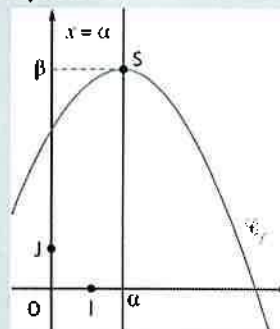
β est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en α

Dans les deux cas, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, qui admet la droite $\Delta: x = \alpha$ pour axe de symétrie.



Si $a > 0$:

on dit que les branches de la parabole sont tournées vers le haut



Si $a < 0$:

on dit que les branches de la parabole sont tournées vers le bas



Etudier les variations des fonctions $f_1: x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^2 + 8x - 1$ et $f_2: x \mapsto -x^2 + 2x + 2$.

Exemple 3.3

- Proposer un algorithme demandant trois réels a, b et $c, a \neq 0$ et retournant les variations de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ ainsi que la valeur de son extrémum et la valeur en laquelle il est atteint.
- Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = -7x^2 + 28x + 3$. Donner les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$ et une équation de son axe de symétrie.

Exemple 1 :

1. Pour répondre aux questions on regarde si l'expression de la fonction peut-être écrite sous la forme $ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a. Soit $x \in \mathbb{R}$

*important
de dire c'est
quoi*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -x^3 + x^2(x+1) + 2 \\ &= -x^3 + x^3 + x^2 + 2 \\ &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 = \sqrt{1} \text{ ou } -\sqrt{1}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (2x+1)^2 - 4x^2 \\ &= (2x+1+2x)(2x+1-2x) \\ &= (4x+1)(1) \end{aligned}$$

Par de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ donc pas second degré

c. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 3x^2 - 12x + 9x \\ &= 3x^2 - 3x \text{ oui!} \end{aligned}$$

2. Méthode 1: par identification

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$\text{on regroupe } \Rightarrow ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

les termes
de x

Par unicité de la forme développée d'un polynôme on peut identifier les coef

$$ax^2 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$1x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=2 \\ c-b=-1 \\ -c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2+a=3 \\ c=2 \end{cases}$$

Méthode 2: avec une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 + 3x + 2 \\ \hline 3x^2 - x - 2 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 2x - 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et factorisation d'un trinôme du second degré

Soit f une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Définition 3. 2

équation du second degré, racine de f , discriminant

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x est appelée équation du second degré.
- On appelle racine de f toute solution λ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est à dire tout nombre λ tel que $f(\lambda) = 0$.
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété 3. 3

résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
 Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
 Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

- Le nombre Δ est appelé discriminant car il permet de distinguer, ou discriminer, différents cas possibles.
- Lorsque a et c sont de même signe on a $\Delta \geq 0$ donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
- Lorsque $b = 0$ ou que $c = 0$ on peut déterminer les solutions sans utiliser la propriété précédente (cf ex 3. 4, 1.d et 1.e)

Exemple 3. 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-x^2 - x + 2 = 0$;

c. $3x^2 - 2x + 1 = 0$;

e. $3 - x^2 = 0$.

b. $18x^2 + 24x + 8 = 0$;

d. $5x^2 + x = 0$;

2. Proposer un algorithme renvoyant les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Propriété 3. 4

factorisation

Si $\Delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Exemple 3. 5

Factoriser les trinômes suivants :

$A(x) = 2x^2 + x - 1$

$C(x) = x^2 - 5$

$B(x) = -2x^2 + 16x - 32$

$D(x) = 3x^2 - 2x$

Remarque

- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 sont qualifiés de racines simples, ou d'ordre 1. Si $\Delta = 0$ on dit que x_0 est racine double, ou d'ordre 2.
- Dans certains cas (identité remarquable, $b = 0$, $c = 0$, racine évidente) on peut factoriser $ax^2 + bx + c$ sans utiliser la propriété précédente (cf ex 3. 5)

Propriété 3. 5

somme et produit de racines

Dans le cas où $\Delta > 0$:
 - $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
 - $p = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple 3. 6

1. Trouver deux nombres réels de somme 25 et de produit 144.
2. Trouver une racine évidente de $2x^2 + 3x + 1$ et déterminer l'autre avec la propriété 3. 4

Conséquences

- Si on connaît une racine on peut calculer l'autre rapidement en utilisant s ou p . On a donc intérêt à repérer, lorsque c'est possible, une racine évidente comme 1, -1, 2, -2 etc. (cf ex 3. 5)
- La connaissance de s et p permet de donner des informations sur le signe des racines. Par exemple le trinôme $x^2 - 6x + 8$ admet deux racines. Leur produit vaut $\frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ donc les racines sont de même signe. Leur somme vaut $-\frac{-6}{1} = 6$ donc les racines du trinôme sont toutes deux positives (si elles étaient négatives leur somme le serait aussi).
- La propriété précédente permet d'écrire $ax^2 + bx + c = a(x^2 - sx + p)$. En particulier si $a = 1$ alors $-s = b$ et $p = c$. Par exemple, avec $x^2 - 6x + 8$ on a directement $s = 6$ et $p = 8$.
- On peut facilement démontrer que deux réels ont pour somme s et pour produit p si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$. Cela permet de trouver deux réels connaissant leur somme et leur produit (ex 3. 5).

3 Signe d'un trinôme du second degré

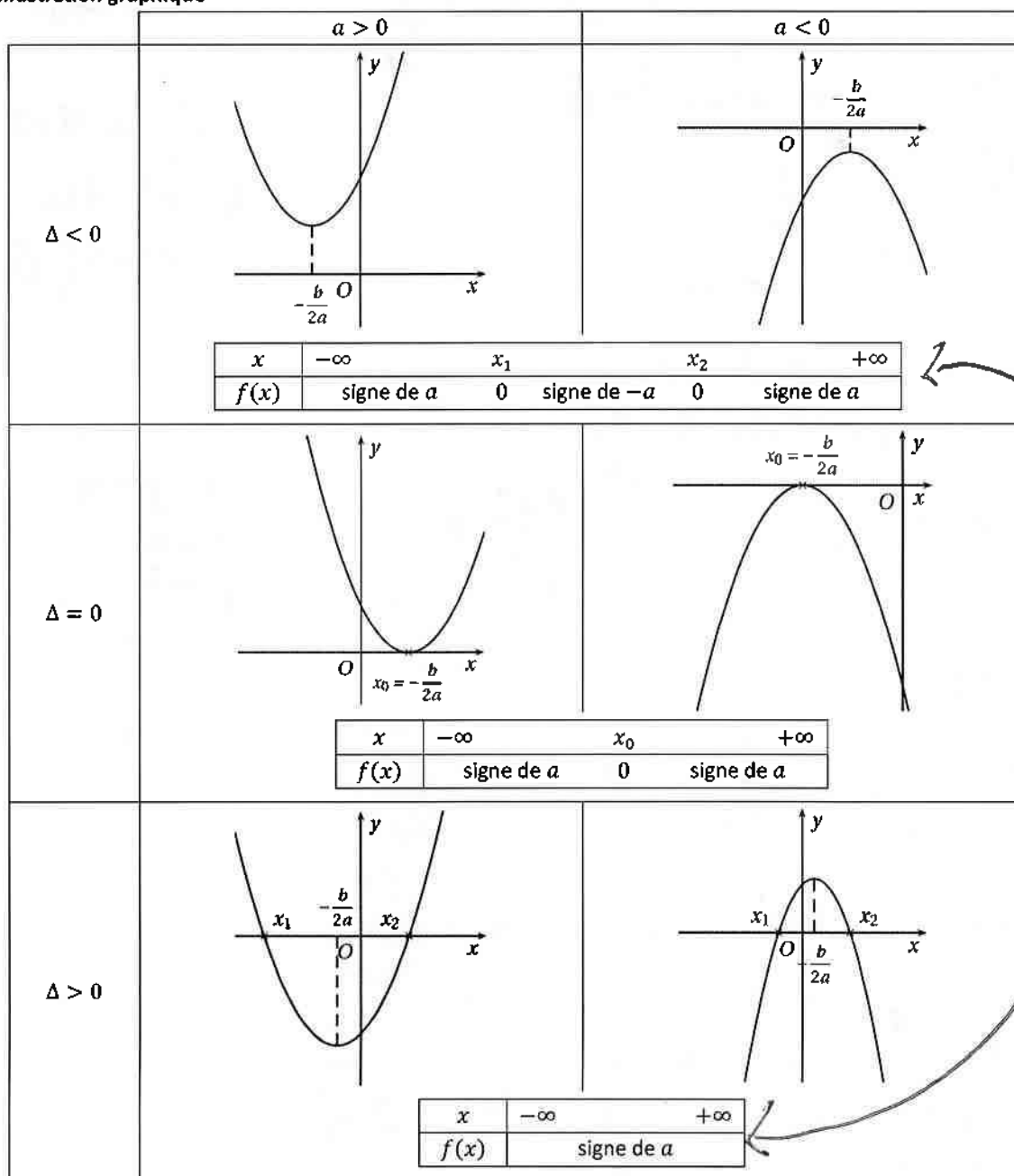
Propriété 3. 6

signe de $ax^2 + bx + c$ Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 , son unique racine.Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe de a partout sur $\mathbb{R}$ sauf entre ses deux racines x_1 et x_2 .

Remarque

On peut retenir cette propriété sous cette forme : le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre les racines quand elles existent.**Exemple 3. 7** | Résoudre les inéquations : a. $(2x + 1)(3 - x) > 0$; b. $-2x^2 + 5x \leq 4$; c. $(x - 4)^2 \leq (2 - 5x)^2$

Illustration graphique



D1 – Résolution des équations du second degré

Rappels

1. Toute fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ possède une écriture (dite canonique) de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2. Pour tous nombres réels a et b , on a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

1. En utilisant les notations des paragraphes 1. et 3. du cours, montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

2. Raisonnement par disjonction de cas

a. Si $\Delta < 0$, expliquer pourquoi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

b. Si $\Delta = 0$, montrer que α est l'unique solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

c. Si $\Delta > 0$, montrer que l'équation $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est équivalente à une équation produit nul.

En déduire les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction de a , b et Δ .

CORRIGÉ

1. D'après le Rappel 1, pour tout réel x , on a : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est donc équivalente à $a(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a}$, ou encore à $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

2. a. Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

Puisque le carré d'un nombre réel est positif, il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est une égalité vraie.

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.

b. Si $\Delta = 0$, on obtient $(x - \alpha)^2 = 0$. Cette équation est équivalente à $x - \alpha = 0$.
Finalement, α en est l'unique solution.

c. Si $\Delta > 0$, le nombre $\sqrt{\Delta}$ existe. Donc l'équation $(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est équivalente à $(x - \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ (*).

D'après le Rappel 2, elle est aussi équivalente à $\left[(x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[(x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$.

C'est une équation produit nul.

Donc $(x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $(x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$. Ainsi $x = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or, $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Donc les solutions sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque : En écrivant $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ à l'étape (*), on obtient les mêmes solutions.

Démonstration 1 : Forme canonique

Rappel : Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2.$$

Soit f une fonction polynôme du second degré, c'est-à-dire une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec a réel non nul et b et c des réels.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x)$ peut s'écrire $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.

2. Vérifier alors que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

3. En déduire que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Démonstration 2 : Variations d'une fonction polynôme du second degré

Rappel : Une fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle I si pour tous x_1 et x_2 dans I avec $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Soit f une fonction polynôme du second degré.

Partie A. Cas où a est strictement positif

Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Étude sur $]-\infty; \alpha]$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $]-\infty; \alpha]$, tels que $x_1 < x_2 \leq \alpha$.

1. En utilisant les variations de la fonction carré, démontrer que $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$.

2. En déduire que $f(x_1) > f(x_2)$ et conclure.

Étude sur $[\alpha; +\infty[$

Remarque : On pourrait raisonner de même sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$. On propose ici une autre démonstration.

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $[\alpha; +\infty[$, tels que $\alpha \leq x_1 < x_2$. Posons $y_1 = 2\alpha - x_2$ et $y_2 = 2\alpha - x_1$.

1. Vérifier successivement :

$y_1 \in]-\infty; \alpha]$ et $y_2 \in]-\infty; \alpha]$, puis $y_1 < y_2$, puis $f(y_2) = f(x_1)$.

2. De même, on montre que $f(y_1) = f(x_2)$.

Déduire des questions précédentes que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

Partie B. Cas où a est strictement négatif

Démontrons que f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Étude sur $]-\infty; \alpha]$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $]-\infty; \alpha]$ tels que $x_1 < x_2 \leq \alpha$.

1. Démontrer que $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$.

2. En déduire que $f(x_1) < f(x_2)$ et conclure.

Étude sur $[\alpha; +\infty[$

Soit x_1 et x_2 deux nombres appartenant à $[\alpha; +\infty[$ tels que $\alpha \leq x_1 < x_2$.

En adaptant les questions 1. et 2. ci-dessus, démontrer que f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Démonstration 3 : Axe de symétrie d'une parabole

Considérons la parabole $\mathcal{P}$ représentant, dans un repère orthonormé, la fonction polynôme de degré 2 écrite sous forme canonique $f: x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$.

1. Montrer que pour tout nombre réel h , on a :

$$f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$$

2. a. Justifier que, pour tous points M et M' symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$, il existe un nombre réel h tel que $x_M = \alpha - h$ et $x_{M'} = \alpha + h$.

b. En déduire que la parabole $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

Démonstration 4 : Somme et produit des éventuelles racines

1. Dans le cas $\Delta > 0$, rappeler l'expression des deux racines de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

2. a. Vérifier alors que leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$.

b. En utilisant une identité remarquable, montrer que le produit des racines est égal à $\frac{1}{4a^2} \times (b^2 - \Delta)$ et en déduire

qu'il est égal à $\frac{c}{a}$.

Démonstration 5 : Écriture factorisée

Rappel : Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Soit f une fonction polynôme de degré 2. On utilisera les notations des paragraphes 1. et 3. du cours.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x)$ peut

s'écrire $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

2. Supposons que $\Delta = 0$. Déduire de la question 1. l'écriture factorisée de f .

3. Supposons que $\Delta > 0$.

a. Écrire $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ comme la différence de deux carrés.

b. En utilisant le Rappel, donner l'écriture factorisée de f .

Activité 1 : variations d'une fonction polynôme du second degré

Un constructeur d'automobile décide de commercialiser des voitures à bas coût : chaque voiture doit être vendue 6 milliers d'euros.

Sa production q peut varier entre 0 et 100 milliers de voitures. Suite à une étude réalisée, les coûts de production (en milliers d'euros) sont donnés par la formule suivante : $C(q) = 0,05q^2 + q + 80$ (q exprimé en milliers d'unités).

1. Exprimer, en fonction de q , la recette $R(q)$, en milliers d'euros.
2. On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ est unique et appelée forme développée de f .

Déduire de la question précédente la forme développée, en fonction de q , de la fonction B qui donne le bénéfice réalisé par l'entreprise.

3. Dans cette question on se propose de déterminer le nombre d'automobiles à produire et à vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

a. En développant l'expression proposée, déterminer deux réels α et β tels que $B(q) = -0,05(q - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée forme canonique de f .

b. Rappeler les variations des fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \alpha$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $h : x \in \mathbb{R} \mapsto -0,05x + \beta$.

En déduire que B est décroissante sur $[\alpha ; 100]$.

- c. Quel est le nombre d'automobile à produire pour obtenir un bénéfice maximal ?

Activité 2 : déterminer les racines d'une fonction du second degré

1. On se propose de résoudre l'équation du second degré (E) : $x^2 + 10x = 39$.

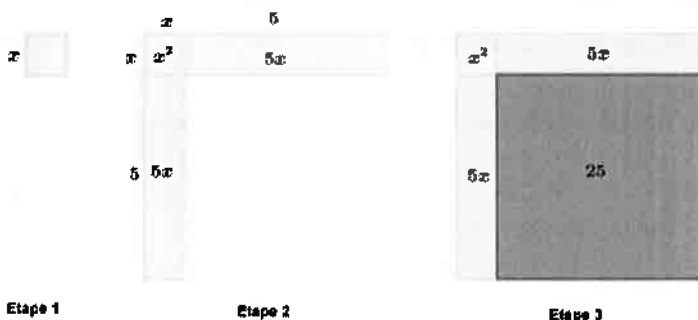
Voici la méthode proposée par Al-Khwârizmî.

Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x .

Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire respective vaut $\frac{10}{2} \times x$.

On obtient ainsi 5 comme autre dimension.

Étape 3 : on complète alors le grand carré.



- a. Exprimer l'aire de la surface colorée en jaune de deux façons différentes, en déduire que :

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25.$$

- b. En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$.

Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).

Al-Khwârizmî ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui 64 n'a qu'une racine carrée qui est 8.

- c. Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2. Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^2 + 12x = 45$

b. $x^2 + 4x - 32 = 0$

Activité 3 : étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

1. On considère les fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -4x^2 + 8x + 21$; $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$; $i(x) = 3x^2 + 12x + 20$.

- a. Factoriser $f(x)$. En déduire, à l'aide d'un tableau, le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- b. Montrer que $g(x) = (-2x + 7)(2x + 3)$. En déduire, à l'aide d'un tableau, le signe de $g(x)$.
- c. Factoriser $h(x)$. En déduire le signe de $h(x)$.
- d. Montrer que $i(x) = 3(x + 2)^2 + 8$. En déduire le signe de $i(x)$.

2. Tracer les courbes représentatives des quatre fonctions précédentes. L'allure de ces courbes confirme-t-elle les

résultats précédents sur le signe de ces fonctions ? Justifier.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

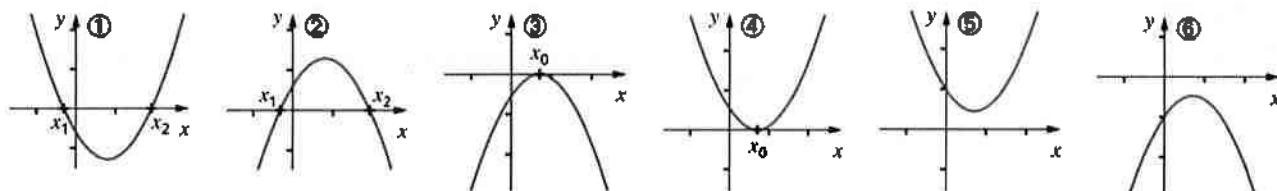
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels, } a \neq 0.$$

Suivant les valeurs de a, b et c on peut obtenir l'une des six courbes ci-dessous.

- a. Pour chacune de ces courbes :

- indiquer le signe de a
- celui du discriminant Δ de $ax^2 + bx + c$
- dresser le tableau de signes de $f(x)$.

- b. Enoncer alors une règle pour déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.



Etudier une fonction du second degré

Exercice 3.1

Mettre sous forme canonique chacun des trinômes donnés.

- a. $x^2 + 3x - 10$ d. $3 - 2x^2$
 b. $x^2 + 7x + 11$ e. $x^2 - 2x$
 c. $-3x^2 + 10x + 8$ f. $(2x - 3)^2$

Exercice 3.2 (29 p 51)

f est une fonction polynôme du second degré. Préciser dans chaque cas le signe du coefficient de x^2 et les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f dans un repère.

a.

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$f(x)$		11	

b.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f(x)$		9	

Exercice 3.3 (101 p 55)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Étudier les variations de f .

Exercice 3.4

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (2x + 2)(3 - x)$ et C sa courbe représentative dans un repère.

- Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer la forme canonique de f .
- En utilisant la forme la plus adaptée déterminer :
 - l'image de 0 par f ;
 - les antécédents de 6 par f ;
 - la table de variation de f ;
 - l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$;
- Déterminer :
 - une équation de l'axe de symétrie de C ;
 - les coordonnées du sommet de la parabole C .

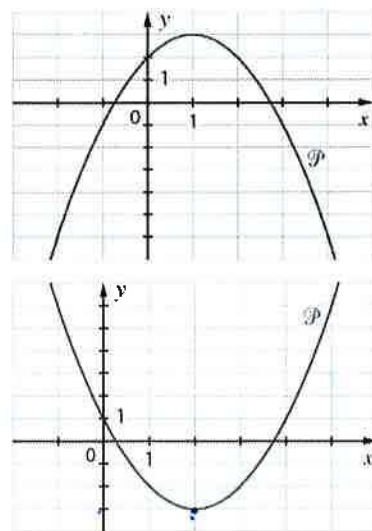
Exercice 3.5 (98 p 54)

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 4x^2 - x + 1$.

- Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$.
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 3.6

Les courbes représentées ci-dessous sont deux fonctions polynôme du second degré. Déterminer une expression de chacune d'elles.



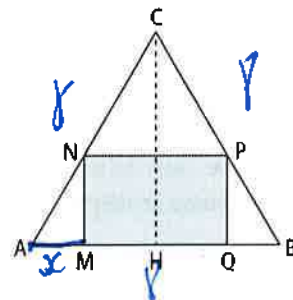
Exercice 3.7 (111 p 55)

Pour tout nombre réel m , on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = 2x^2 + mx + 1$. Conjecturer avec une calculatrice ou un logiciel la nature de l'ensemble des points formés par les sommets des paraboles représentant les fonctions f_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$ puis vérifier ou infirmer cette conjecture par une démonstration.

Exercice 3.8 (122 p 56)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$. On pose $AM = x$.

- Quelles sont les valeurs de x possibles ?
- Calculer CH , où H est le pied de la hauteur issue de C .
- En déduire que $MN = x\sqrt{3}$.
- Déterminer en justifiant, la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.



Exercice 3.9 (120 p 56)

On considère un rectangle $ABCD$ dont les côtés mesurent 4 cm et 8 cm. Les points M et N sont respectivement sur les côtés $[AD]$ et $[DC]$ tels que $DN = 2AM$. On note x la longueur en centimètres du segment $[AM]$.

- Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre x ?
- Déterminer en justifiant, la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle MNB est maximale.

Exercice 3.10

Un berger veut disposer ses 200 mètres de grillage en forme de rectangle. Déterminer les dimensions du rectangle ayant la plus grande aire.

Déterminer les racines d'une fonction du second degré

Exercice 3. 11

Résoudre les équations du second degré données

1. $x^2 - 2x - 4 = 0$
2. $x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $2x^2 + 2x + 5 = 0$
4. $25x^2 - 80x + 64 = 0$

Exercice 3. 12

Résoudre les équations du second degré données

1. $49x^2 - 25 = 0$
2. $2x^2 + 3 = 0$
3. $2x^2 - 3x = 0$
4. $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Exercice 3. 13

Résoudre les équations du second degré données

- a. $(2x + 1)^2 = -2x + 5$;
- b. $(2x + 3)(x - 1) = (3x - 2)(2x - 6)$
- c. $(x + 2)(x^2 - 3) = (2x + 3)(x^2 + x - 2)$
- d. $x^3 + x = x^2$
- e. $x^4 = x^2$

Exercice 3. 14 (54 p 52)

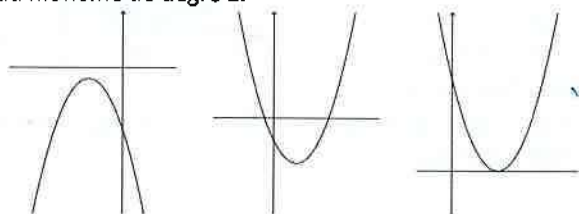
Sophie affirme, sans calculer la valeur exacte du discriminant, que l'équation $7x^2 + 19x - 2019$ possède deux racines distinctes. A-t-elle raison ? Pourquoi ?

Exercice 3. 15

1. Déterminer le signe du discriminant des trinômes suivants le plus simplement possible.

- a. $3 - 4x^2$;
- b. $2x(x - 4)$;
- c. $x^2 + 1$.

2. Chacune des représentations graphiques suivantes est celle d'une fonction trinôme. Préciser pour chacune d'elles le signe de son discriminant et celui du coefficient du monôme de degré 2.



Exercice 3. 16

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{8-5x-3x^2}{4x^2+2x-2}$$

a. Déterminer le domaine de définition de f .

b. Résoudre $f(x) = 0$.

2. Résoudre les équations suivantes :

- a. $\frac{1}{x-3} = 4x - 1$
- b. $\frac{x^2+2x+3}{x-1} = -2$
- c. $\frac{x}{x+1} = x - 1$

Exercice 3. 17 (32, 33 p 51)

Factoriser les polynômes suivants

- a. $x^2 + 6x + 9$
- b. $x^2 + 18x + 77$
- c. $x^2 - x - 6$
- d. $-x^2 + 2x + 15$
- e. $2x^2 - 7x + 8$
- f. $3x^2 + 7x + 2$

Exercice 3. 18

Résoudre les équations suivantes.

- a. $\frac{2x+2}{x-1} = \frac{x}{2x+1} + \frac{x+2}{2x^2-x-1}$
- b. $\frac{2x}{3(x-2)} - \frac{x+5}{2(x+1)} = \frac{4}{x^2-x-2}$
- c. $\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{2x}{-3x^2-5x+2}$
- d. $\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{x}{2x^2+3x-2} = 0$

Exercice 3. 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de f . Que peut-on en déduire ?

2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$ et en déduire une forme simplifiée de $f(x)$.

Exercice 3. 20

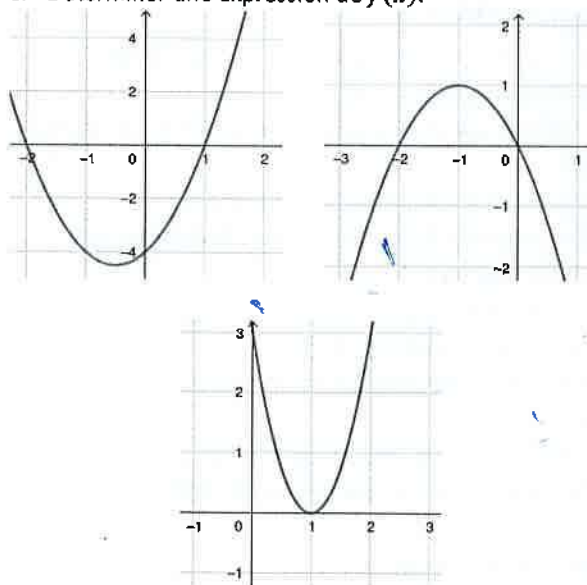
Les graphiques ci-dessous représentent des fonctions du second degré $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$.

Dans chaque cas :

a. Que peut-on dire de a et b ?

b. Que peut-on dire de Δ ?

c. Déterminer une expression de $f(x)$.



Exercice 3. 21 (46 p 52)

1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 1 et en -12.

2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en -4 et 3 et telle que $f(4) = 4$.

3. Déterminer la fonction polynôme du second degré g de racines -1 et 1 et telle que $g(0) = 1$.

Exercice 3. 22 (16 p 50)

Les équations suivantes ont deux racines distinctes. Donner leur somme et leur produit.

- a. $x^2 + 5x - 11 = 0$
- b. $2x^2 - x - 89 = 0$
- c. $-3x^2 + 7x + 20 = 0$
- d. $-x^2 - 9x + 17 = 0$

Exercice 3. 23 (44 p 52)

- Déterminer le réel c de telle sorte que le réel -3 soit solution de l'équation $2x^2 - 5x + c = 0$.
- Sachant que l'équation précédente admet une autre solution distincte de -3 , déterminer cette deuxième solution.

Exercice 3. 24 (82 p 53)

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 15 et le produit est -54 .

Exercice 3. 25 (83 p 53)

Existe-t-il un rectangle d'aire 5 et de périmètre 8 ?

Exercice 3. 26 (55-57 p 52)

Déterminer les solutions de l'équation donnée sachant que l'une d'elles est évidente.

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a. $x^2 - 8x + 7 = 0$ | b. $2x^2 + x - 3 = 0$ |
| a. $-4x^2 + 7x + 11 = 0$ | b. $x^2 + 10x + 9 = 0$ |
| a. $37x^2 - 3x - 40 = 0$ | b. $x^2 - x - 2 = 0$ |

Exercice 3. 27 (53 p 52)

Résoudre les équations sans utiliser le discriminant.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a. $x^2 + x - 12 = 0$ | b. $5x^2 - 3x + 1 = 0$ |
| c. $2x^2 + x - 3 = 0$ | d. $9x^2 - 30x + 25 = 0$ |

Exercice 3. 28

- On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 + x^2 - 2 = 0$.
 - Cette équation est-elle une équation du second degré ?
 - Si l'on remplace x^2 par X , par quoi doit-on remplacer x^4 ?
 - En déduire que l'équation (E) est équivalente à une équation du second degré (E') dont l'inconnue est X .
 - Résoudre (E') .
 - Pour chaque solution X trouvée, déterminer les valeurs de x correspondantes. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- En utilisant la même méthode, résoudre les équations proposées :

a. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;	b. $x^4 - 3x^2 + 5 = 0$.
---------------------------	---------------------------
- En effectuant un changement d'inconnue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 + 2)^2 - 8(x^2 + 2) + 15 = 0$.

Exercice 3. 29 (Hatier 137 p 98)

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 13x - 21.$$

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer une solution entière de l'équation $g(x) = 0$ et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- Déterminer les valeurs des nombres réels a , b et c tels que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c).$$
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis valider ou infirmer la conjecture concernant le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 3. 30 (Déclic 178 p 31)

- Montrer que pour tout nombre réel x et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$
- En déduire que pour tout entier naturel n , $2020^n - 1$ est divisible par 2019.

Exercice 3. 31 (Déclic 179 p 31)

- Soient a et x deux nombres réels et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer, en développant, que l'expression suivante donne une factorisation de $x^n - a^n$.

$$(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$
- Retrouver cette formule en utilisant le résultat de la question 1 de l'exercice précédent en remplaçant x par $\frac{x}{a}$ dans le cas où $a \neq 0$.
- Ecrire une formule de factorisation de $x^3 - a^3$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $13^n - 2^n$ est divisible par 11.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 3^{2n} - 2^n$. Trouver un entier qui divise a_n pour tout entier naturel n .

Exercice 3. 32 (68 p 52)

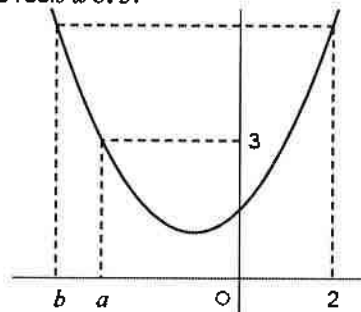
Déterminer le réel a tel que l'équation $x^2 + 2x - 7a = 0$ n'admette qu'une seule solution. Quelle est cette solution ?

Exercice 3. 33 (69 p 52)

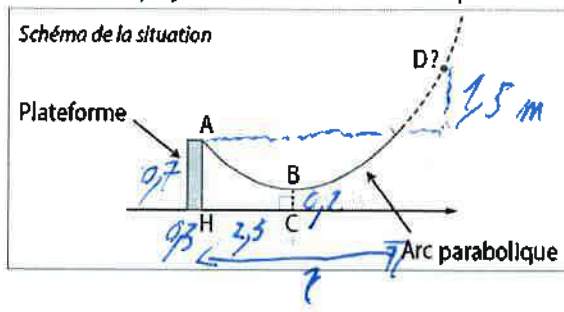
Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ admette deux solutions distinctes.

Exercice 3. 34

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b .

**Exercice 3. 35** (CQFD 79 p 105)

Quentin doit présenter au conseil municipal des jeunes de sa ville un projet de construction d'une rampe de skate.



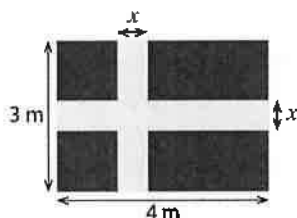
Après discussion avec les jeunes skateurs de la ville, il propose les conditions suivantes :

- la plateforme a une hauteur de 70 cm et une largeur de 30 cm ;
- la rampe est modélisée par un arc de parabole ;
- le point B le plus bas de la rampe est situé à 20 cm du sol et son projeté orthogonal C sur le sol est situé à 230 cm du pied H de la plateforme ;
- la différence entre les hauteurs des points de départ D et d'arrivée A doit être égale à 1,50 m.

À quelle distance du point H doit-on placer le pied de la deuxième plateforme afin que la rampe vérifie la totalité des conditions ? On travaillera avec des valeurs exactes.

Exercice 3. 36 (86 p 53)

Quelle valeur x doit prendre la largeur de la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Exercice 3. 37 (Hatier 153 p 100)

Pendant la période des soldes, un site de ventes privées affiche une remise de t % sur les prix des chaussures. Pour les clients titulaires de la carte de fidélité, une remise supplémentaire de $0,5t$ % sur le prix soldé est accordée.

Noémie bénéficie de ces deux remises et paie 18 € un article dont le prix initial était de 25 €.

Quelle est la valeur de t ?

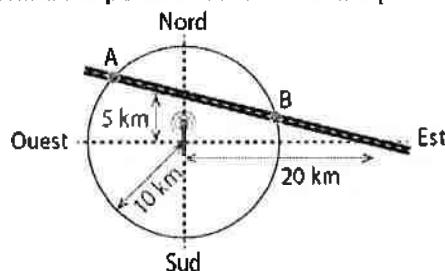
Exercice 3. 38 (89 p 54)

Des participants à une conférence ont échangé des poignées de mains et l'un d'eux a compté qu'il y avait eu en tout 325 poignées de mains.

Combien de personnes ont assisté à la conférence ?

Exercice 3. 39 (171 p 66)

Un émetteur de radio a une portée de dix kilomètres. Une route parfaitement rectiligne passe à 5 km au nord et à 20 km à l'est de l'émetteur. On veut déterminer les points A et B délimitant la portion de route couverte par l'émetteur.



On choisit un repère orthonormé formé par les droites (NS) et (WE), dont l'origine O est l'émetteur et d'unité un kilomètre.

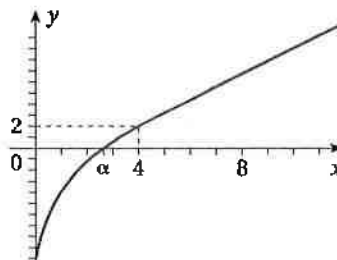
1. Montrer que les coordonnées $(x; y)$ des points A et B vérifient $x^2 + y^2 = 100$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. En déduire que les ordonnées des points A et B sont

solutions de l'équation $17y^2 - 160y + 300 = 0$.

4. En déduire les coordonnées des points A et B à un mètre près.

Exercice 3. 40

La fonction f donnée par $f(x) = x - \frac{10}{x+1}$ est croissante sur l'intervalle $[0; 8]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comme l'illustre sa représentation graphique ci-dessous.



On souhaite encadrer la valeur α avec la précision p choisie. Le principe est le suivant :

- on commence par calculer l'image du centre de l'intervalle $[0; 8]$;
- 4 est le centre de l'intervalle $[0; 8]$ et $f(4) = 2$ est positif, donc $\alpha < 4$ car la fonction f est croissante ;
- on peut en conclure que $\alpha \in [0; 4]$;
- on réitère le processus sur l'intervalle $[0; 4]$.

a. Par quelle formule calcule-t-on le centre c d'un intervalle $[a; b]$ à partir des bornes a et b ?

b. Compléter le tableau suivant pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,5. On utilisera une calculatrice pour obtenir les valeurs des images $f(x)$.

a	b	$b - a$	c	$f(c)$	signe de $f(c)$
0	8	8	4	2	
0	4	4	2	$\approx -1,3$	
		2	3		

c. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il donne l'encadrement souhaité.

```

Entrer un nombre positif p
a prend la valeur 0
b prend la valeur 8
Tant que b - a > p
    Si f((b-a)/2) > 0 alors
        b prend la valeur (b-a)/2
    Sinon
        a prend la valeur (b-a)/2
    Fin si
Fin tant que
Afficher a, b

```

d. Exécuter l'algorithme précédent pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-5} .

Etudier le signe d'une fonction du second degré

Exercice 3. 41 (36 p 51)

Résoudre les inéquations suivantes

- $x^2 + 2x \leq 24$
- $x^2 + x + 6 \geq 0$
- $-2x^2 - 12x - 18 < 0$
- $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} \geq 0$
- $(2x-3)^2 - (2x-3)(x^2-x+1) < 0$
- $(-9x^2+12x-4)(2x^2+x-6) > 0$

Exercice 3. 42

Résoudre les inéquations suivantes.

- $x^2 \geq -2x - 7$
- $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
- $(x^2 + 2x + 1)^2 \leq 16$
- $9x^2 - 6x + 1 < 0$

Exercice 3. 43

Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par :

- $f(x) = 3 - \sqrt{2x^4 + 5x^3 - 3x^2}$;
- $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$.

Exercice 3. 44

1. Résoudre les inéquations suivantes. On pourra vérifier les résultats graphiquement.

- $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$;
- $7x^2 + 11 > 6x(x+1)$.

2. a. Étudier le signe des trinômes :

$$x^2 - 5x + 6 \text{ et } -x^2 + 3x + 4.$$

b. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation :

$$\frac{12}{5(x+1)} + \frac{2}{5(4-x)} \leq 1.$$

Exercice 3. 45

Résoudre les inéquations suivantes :

- $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$
- $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6} \geq -1$
- $\frac{x+3}{2(x-1)} \leq \frac{3(x-8)}{x-5}$
- $\frac{x^2-x+1}{x+2} \leq 2x+3$;
- $\frac{x}{x-1} \geq \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$;
- $\frac{(6x+8-2x^2)(3-x)}{4x^2-12x+9} \geq 0$.

Exercice 3. 46 (144 p 57)

Soit f une fonction polynôme du second degré d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant strictement positif. Soit α un nombre réel.

- Montrer que, si α est compris entre les racines de f , alors $a \times f(\alpha) < 0$.
- La condition $a \times f(\alpha) < 0$ est-elle une condition nécessaire et suffisante pour que α soit compris entre les racines de f ?
- Proposer une inéquation du second degré ayant pour ensemble solution l'intervalle $] -7 ; 2]$.
- Proposer une inéquation du second degré ayant pour ensemble solution la réunion des intervalles $] -\infty ; 2]$ et $[9 ; +\infty [$.

Exercice 3. 47 (70 p 53)

Déterminer tous les réels b tels que l'équation $x^2 + bx + 5 = 0$ n'ait aucune solution.

Exercice 3. 48

Soit m un réel. Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$$

admet-elle deux solutions distinctes ?

Exercice 3. 49 (Hatier 118 p 94)

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.b. Dresser par le calcul le tableau de signes de la fonction f , puis valider ou corriger la conjecture émise au a.2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .b. Que peut-on en déduire pour les représentations graphiques de f et de g ?

c. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3. 50

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8.$$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.2. Dresser le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$ et interpréter graphiquement le résultat.3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 3$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3. 51

Partie A

On désigne par $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x(4-x) \text{ et par } \mathcal{H} \text{ celle de la fonction } g :$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mapsto \frac{x-4}{x-3}.$$

1. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.2. Étudier algébriquement les positions relatives des courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.

Partie B

 m désigne un nombre réel non nul.On désigne par un repère $\mathcal{P}_m$ la parabole représentant la fonction $f_m : x \in \mathbb{R} \mapsto mx^2 - 4mx + 4m + 2$.1. Montrer qu'un point $M(x; y)$, avec $x \neq 3$, appartient à la fois à l'hyperbole $\mathcal{H}$ et à la parabole $\mathcal{P}_m$ si et seulement

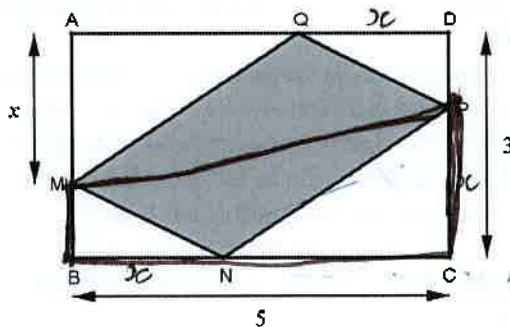
si son abscisse x est solution de l'équation $(x-2)(mx^2 - 5mx + 6m + 1) = 0$.

2. Dédurre de cette factorisation l'ensemble des réels m pour lesquels $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{H}$ ont :

- un seul point commun ;
- deux points communs ;
- trois points communs.

Exercice 3. 52

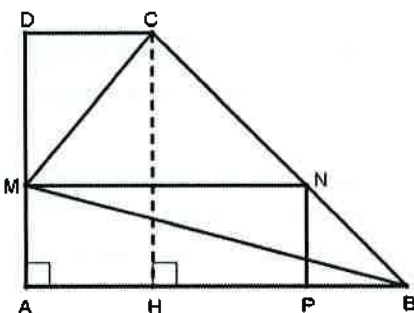
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. On place sur les côtés les points M, N, P et Q comme sur la figure, avec $AM = BN = CP = DQ$. On note x la distance AM en cm et $S(x)$ l'aire de $MNPQ$ en cm^2 .



1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction S ?
2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}, S(x) = 2x^2 - 8x + 15$.
3. Peut-on placer M de telle sorte que $MNPQ$ ait une aire de 9 cm^2 ?
4. a. Dresser le tableau de variation de S .
b. Quelle est l'aire maximale de $MNPQ$? Quelle est l'aire minimale de $MNPQ$?
5. a. Montrer que l'aire T du trapèze $MBCP$ est constante.
b. Pour quelles valeurs de x l'aire $MNPQ$ est-elle strictement inférieure à celle du trapèze ?

Exercice 3. 53

$ABCD$ est un trapèze tel que $AB = 6$, $CD = 2$ et $AD = 4$. Un point M décrit le segment $[AD]$. On construit le rectangle $AMNP$ avec $N \in [BC]$ et $P \in [AB]$. On pose $x = AM$.



1. Quel intervalle décrit x ?
2. a. Quelle est la nature du triangle BPN ?
b. En déduire BP en fonction de x .
c. Montrer que l'aire du rectangle $AMNP$ est $f(x) = -x^2 + 6x$.

d. Dresser le tableau de variations de f ainsi définie sur $[0; 4]$.

3. a. Calculer l'aire de $ABCD$.

b. En déduire que l'aire $g(x)$ du triangle BMC est $g(x) = 12 - 2x$.

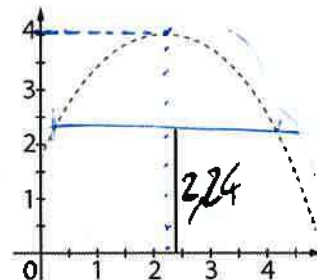
4. Tracer les courbes représentant les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle BMC .

5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

- a. l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale ;
 - b. $AMNP$ et BMC ont la même aire ;
 - c. l'aire de $AMNP$ est supérieure à celle de BMC .
6. Expliquer comment vérifier graphiquement les résultats de la question 5.

Exercice 3. 54 (CQFD 56 p 100)

Lors d'un entraînement de volley-ball, Thibault prend des photos en rafales pour analyser la passe de Sophia au-dessus du filet. Il modélise la hauteur (en mètre) du ballon par la fonction $h: t \mapsto -0,49t^2 + 2,1t + 1,75$, où t est le temps (en seconde).



1. Déterminer l'écriture canonique de la fonction h .
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de la passe représentée ?
3. Au bout de combien de temps le ballon touche-t-il le sol ?
4. La hauteur du filet est 2,24 m. Pendant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ? On arrondira au dixième de seconde.

Exercice 3. 55 (CQFD 63 p 101)

Un artisan fabrique des tables. Il en produit au maximum 100 par mois. On suppose que toute table fabriquée est vendue. La fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $C(x) = 0,2x^2 + 4x + 1,2$ modélise le coût de production de x dizaines de tables, en milliers d'euros.

1. Quel est le coût de production de 70 tables ?
2. Donner le nombre de tables produites pour un coût de production de 2 418 €.
3. L'artisan décide de vendre les tables 540 euros l'unité.
a. Vérifier que le bénéfice de l'artisan réalisé par la vente de x dizaines de tables en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur $[0; 10]$ par $B(x) = -0,2x^2 + 1,4x - 1,2$.
b. Pour quels nombres de tables vendues l'artisan perd-il de l'argent ?
c. Pour quel nombre de tables fabriquées et vendues le bénéfice de l'artisan sera-t-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

4 Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

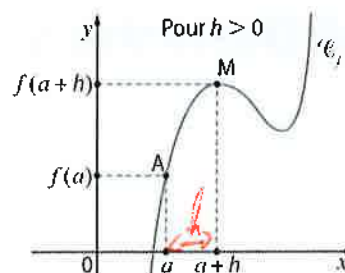
f désigne une fonction définie sur un intervalle I , a un élément de I et h un nombre réel non nul tels que $(a + h) \in I$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

Définition 4.1

taux d'accroissement entre a et $a + h$

On appelle taux de variation (ou d'accroissement) de f entre a et $a + h$ le nombre $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation géométrique : Si A et M sont les points de C_f d'abscisses respectives a et $a + h$ alors la droite (AM) , sécante à la courbe représentative de f , a pour pente (ou coefficient directeur) le taux de variation $\tau_a(h)$.



Exemple 4.1 | Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le taux d'accroissement de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, entre 1 et $1 + h$.

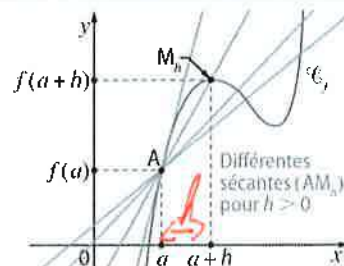
Définition 4.2

nombre dérivé de f en a

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de 0 les nombres $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ sont de plus en plus proches d'un nombre réel l . On dit alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a . Ce nombre l est noté $f'(a)$ et on écrit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation géométrique : Lorsque h tend vers 0 le point M de C_f se rapproche du point A . Dans ce cas la droite (AM) , de coefficient directeur $\tau_a(h)$, se rapproche d'une position limite : la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : - Avec $x = a + h$ cette limite peut aussi s'écrire $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- En physique, lorsque $y = f(x)$, les taux d'accroissements sont souvent notés $\frac{dy}{dx}$ et le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\frac{dy}{dx}$.



Exemple 4.2

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, $f_2 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $f_3 : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.

1. À l'aide du résultat du dernier exemple montrer f_1 est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé de f_1 en 1. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.
2. Démontrer que f_2 est dérivable en 2 et déterminer $f_2'(2)$. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.
3. Démontrer que $\forall h > 0, \frac{f_3(h)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. En déduire que f_3 n'est pas dérivable en 0.

Définition 4.3

tangente à la courbe en a

Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe C_f en $A(a; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 4.1

équation de la tangente à C_f en a

Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe C_f en $A(a; f(a))$ a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

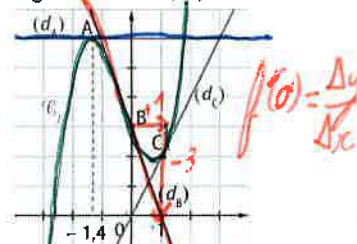
Remarque : - Localement, au point A , C_f est presque confondue avec sa tangente.

Autrement dit, pour $x \approx a$ on a $f(x) \approx f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

- $f'(a) = 0$ si et seulement si la tangente en A est horizontale.

Exemple 4.3

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que ses tangentes en $-1,4$, 0 et 1 .



1. Déterminer $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(-1,4)$.
2. Déterminer une équation des tangentes en 0 , 1 et $-1,4$.

2 Fonction dérivée

Définition 4. 4

fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout nombre appartenant à I .

Si f est dérivable sur I on appelle la fonction dérivée de f sur I , ou simplement dérivée de f sur I , la fonction f' qui, à tout $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$

Exemple 4. 4

Démontrer que les fonctions carré, inverse et racine carrée sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de leur dérivée.

Remarque : - L'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable est appelé l'ensemble de dérivabilité de f .

- Le nombre dérivé de f en x , $f'(x)$ est donc désormais aussi, par définition, l'image de x par la fonction f' .

3 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 4. 2

dérivées des fonctions usuelles

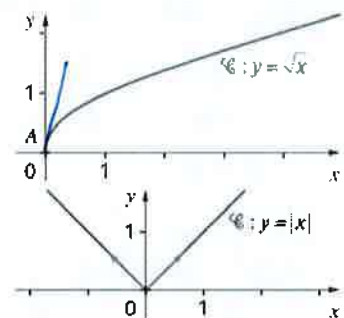
Fonction	Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée
Constante	$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
Affine	$x \mapsto ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$
Carré	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
Puissance	$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$x \mapsto nx^{n-1}$
Inverse	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple 4. 5

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^6$ en 2. Même question pour les fonctions racine carrée et inverse.

Remarque :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable en 0 : on a vu dans l'exemple 2 que $\lim_{h \rightarrow 0} r_0(h) = +\infty$. Ce résultat peut s'interpréter par l'existence d'une demi tangente verticale à la courbe en 0.
- La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 : les limites à gauche et à droite en 0 de $r_0(h)$ valent respectivement -1 et 1 . Cela se traduit par l'existence de deux demi tangentes à gauche et à droite de 0. On a ici un point anguleux en 0.



4 Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante

Propriété 4. 3

dérivée d'une somme, d'un produit par une constante

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit $k \in \mathbb{R}$.

La fonction $u + v$ définie sur I par $x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

La fonction ku définie sur I par $x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et, $\forall x \in I$:

$$(ku)'(x) = k \times u'(x).$$

Exemple 4. 6

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

$$-f(x) = x^4 + 3x^3 - \frac{x^2}{4} + 2x + 1$$

$$-f(x) = 2x^3 - \frac{3}{4x} + 5\sqrt{x}$$

Remarque : - On peut retenir : $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.

- En conséquence les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$

5 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 4. 4

opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
- si v ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- si v ne s'annule pas sur I , $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 4. 7

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- $f(x) = x\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{3}{x-1}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$

Remarque

La dérivée d'un produit (resp quotient) n'est pas égale au produit (resp quotient) des dérivées : $(uv)' \neq u'v'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$.

Propriété 4. 5

dérivée d'une composée

Soit g une fonction dérivable sur I .Pour tout réel x tel que $ax + b$ appartient à I , la fonction f définie par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exemple 4. 8

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- $f(x) = \sqrt{2-x}$
- $f(x) = (4x-1)^3$

Conséquence

- La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (ax + b)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n \times a \times (ax + b)^{n-1}$.
- La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{ax + b}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / ax + b \leq 0\}$ et $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

D1 – Équation réduite de la tangente en un point

Rappel : Dans un repère, $M(x_M ; y_M)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ si et seulement si $y_M = m \times x_M + p$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en a , où a appartient à I et (T_a) la tangente en $A(a ; f(a))$ à la courbe de f .

1. D'après le cours, à quoi est égal le coefficient directeur de (T_a) ?
2. En utilisant le fait que $A(a ; f(a))$ appartient à (T_a) , calculer l'ordonnée à l'origine de (T_a) .
3. En déduire l'équation réduite de (T_a) .

CORRIGÉ

1. D'après le cours, par définition, le coefficient directeur de la tangente (T_a) à la courbe de f en A est $f'(a)$. Donc l'équation de (T_a) est de la forme $y = f'(a)x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine de (T_a) .
2. $A(a ; f(a))$ appartient à la tangente (T_a) . Donc, d'après le rappel, $f(a) = f'(a) \times a + p$.
On peut en déduire l'ordonnée à l'origine de la tangente : $p = f(a) - f'(a) \times a$.
3. La tangente (T_a) a donc pour équation $y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$, ce qui est équivalent à :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

D2 – Expression du nombre dérivé de la fonction carré

Rappels

1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

1. a. Sur quel ensemble la fonction carré, notée f , est-elle définie ?
b. Soit a et h deux réels, avec h non nul. Calculer le taux de variation $\tau_a(h)$ de f entre a et $a+h$ et montrer que $\tau_a(h) = 2a + h$.
2. En déduire que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

CORRIGÉ

1. a. D'après le cours, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
b. D'après le cours, par définition, pour h non nul, le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$\text{Donc } \tau_a(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a + h)}{h} = 2a + h.$$

2. On a $2a + h$ qui tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0.

D'après le cours, f est donc dérivable en a et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$.

Le raisonnement précédent étant valable pour tout réel a , on peut dire aussi que la fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

D3 – Expression du nombre dérivé de la fonction inverse

Rappels

1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un nombre ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

Résultat admis

Si une fonction qui ne s'annule pas tend vers un réel ℓ non nul, alors l'inverse de cette fonction tend vers $\frac{1}{\ell}$.

1. a. Sur quel ensemble la fonction inverse, notée f , est-elle définie ?

b. Soit a et h deux réels non nuls. Calculer le taux de variation $\tau_a(h)$ de f entre a et $a+h$ et montrer que :

$$\tau_a(h) = \frac{1}{-(a^2 + ah)}.$$

2. En déduire que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

CORRIGÉ

1. a. D'après le cours, la fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b. D'après le cours, par définition, pour h non nul, le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a^2 + ah} = \frac{1}{-(a^2 + ah)}. \end{aligned}$$

2. On a $-(a^2 + ah) = -a^2 - ah$ qui tend vers $-a^2$ lorsque h tend vers 0.

De plus, $-a^2 - ah$ étant strictement négatif pour tout h non nul, il ne s'annule pas et il tend vers $-a^2$, qui est non nul.

D'après le résultat admis : $\frac{1}{-(a^2 + ah)}$ tend vers $\frac{1}{-a^2}$, soit vers $-\frac{1}{a^2}$.

D'après le cours, f est donc dérivable en a et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-(a^2 + ah)} = -\frac{1}{a^2}$.

Le raisonnement précédent étant valable pour tout réel a non nul, on peut dire aussi que la fonction inverse est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

D4 – Non-dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Soit h un nombre strictement positif. Montrer que le taux de variation de f entre 0 et h est égal à $\frac{1}{\sqrt{h}}$.
2. On suppose que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend 0. On admet qu'un tel réel ℓ est positif.

Vérifier l'implication suivante : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$.

3. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

CORRIGÉ

$$1. \text{ On a : } \tau_0(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

2. On a : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \sqrt{h} < \sqrt{\frac{1}{(1+\ell)^2}}$, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus $\sqrt{\frac{1}{(1+\ell)^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{(1+\ell)^2}} = \frac{1}{1+\ell}$, car $1+\ell$ est positif.

On a : $0 < \sqrt{h} < \frac{1}{1+\ell} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Donc : $0 < h < \frac{1}{(1+\ell)^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} > 1 + \ell$.

3. L'implication précédente contredit le fait que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tende vers ℓ lorsque h tend vers 0.

En effet, on a supposé dans la question 2. que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers ℓ .

Alors, par définition, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que h soit suffisamment proche de 0.

Alors $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est inférieur à $\frac{1}{2} + \ell$ (ou toute autre valeur $\varepsilon + \ell$ fixée à l'avance, avec $\varepsilon > 0$) pourvu que h soit suffisamment proche de 0.

Mais, d'après l'implication précédente, pour tout h strictement inférieur à $\frac{1}{(1+\ell)^2}$, le nombre $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est

strictement plus grand que $1 + \ell$, ce qui est contradictoire avec l'inégalité $\frac{1}{\sqrt{h}} \leq \frac{1}{2} + \ell$.

Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 1 : Expression du nombre dérivé des fonctions de référence

Rappels : 1. Pour h non nul, le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\tau_a(h)$ défini par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2. f est dérivable en a si $\tau_a(h)$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors unique et $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \ell$.

Pour chaque fonction de référence f suivante : *constante*, *affine* et *cube*, et pour tout réel a :

- a. calculer et simplifier le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ pour tout h non nul ;
- b. montrer que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

Démonstration 2 : Dérivée du produit d'une fonction dérivable par une constante

Rappel : Si f est une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel, alors la fonction kf est définie sur I par $(kf)(x) = k \times f(x)$.

Résultats admis : Si g est une fonction telle que $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors on a $k \times g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} k \times \ell$.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , k un réel et a dans I .

1. Pour tout h non nul tel que $a+h$ est dans I , écrire le taux de variation de la fonction kf entre a et $a+h$.
2. En déduire que kf est dérivable sur I et que $(kf)' = kf'$.

Démonstration 3 : Expression du nombre dérivé de la fonction racine carrée

Rappel : Soit a, b et c des nombres réels, avec c positif. L'expression conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$.

On a en particulier : $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$.

Résultats admis

1. Si une fonction positive tend vers un réel ℓ , alors ℓ est positif et la racine carrée de cette fonction tend vers $\sqrt{\ell}$.
2. Si une fonction qui ne s'annule pas tend vers un réel ℓ non nul, alors l'inverse de cette fonction tend vers $\frac{1}{\ell}$.

On note f la fonction racine carrée et a un réel strictement positif.

1. Pour tout $h > 0$, montrer que le taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

2. En déduire que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

Démonstration 4 : Dérivée de la somme de deux fonctions

Rappel : Si u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I , alors leur somme est la fonction définie sur I par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$.

Résultat admis : Si f et g sont deux fonctions telles que $f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$ et $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell'$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $(f+g)(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell + \ell'$.

Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I et a dans I .

1. Pour tout h non nul tel que $a+h$ est dans I , écrire le taux de variation de la fonction $u+v$ entre a et $a+h$.
2. En déduire que si u et v sont dérivables sur I , alors $u+v$ est dérivable sur I et sa dérivée est égale à $u' + v'$.

Activité 1 : introduction du nombre dérivé

On lâche une bille sans vitesse initiale d'une haute tour.

On considérera que la distance qu'elle parcourt, depuis son lâcher à l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant t , est $d(t) = 4,9t^2$ où t est en secondes et $d(t)$ en mètres.

On veut évaluer sa vitesse instantanée deux secondes après son lâcher.

Pour cela, on va calculer sa vitesse moyenne sur de petits intervalles de temps à partir de $t_0 = 2$.

1. Calculer la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t = 2,1$.
2. Montrer que la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t = 2 + h$ est :

$$\frac{d(2+h)-d(2)}{h} = 19,6 + 4,9h.$$

3. a. Calculer cette vitesse moyenne pour $h = 0,1$; $h = 0,01$; $h = 0,001$.

b. Quand on donne à h (non nul) des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut (on dit « h tend vers 0 ») les vitesses moyennes entre les instants 2 et $2 + h$ tendent vers une « valeur limite ». Donner cette valeur à 0,1 près.

Ce nombre est appelé **nombre dérivé de d en 2**. On le note $d'(2)$ et on écrit $d'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h}$.

- c. Quelle vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ peut-on proposer ?

Activité 2 : introduire la notion de tangente et de nombre dérivé

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

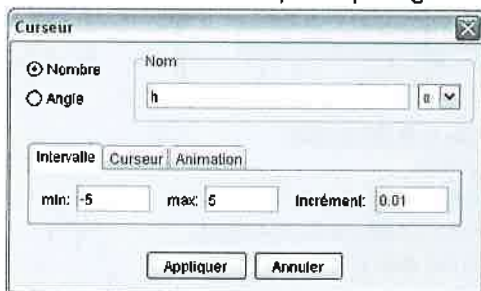
1. Lancer Géogébra.

Faire apparaître le quadrillage (Affichage, grille).

2. Définir la fonction f (barre de saisie, $f(x)=x^2$).

3. Création d'un point $A(a; f(a))$:

- a. Définir un curseur a .
 - b. Définir le point $A(a; f(a))$ (barre de saisie, $A=(a,f(a))$).
4. Création d'un point $M(a+h; f(a+h))$ et de la sécante (AM)
 - a. Définir un curseur h avec un pas de pilotage de 0,01.



- b. Définir le point $M(a+h; f(a+h))$.
- c. Construire la sécante (AM) ; droite passant par deux points ; cliquer sur A puis sur M .
- d. Afficher le coefficient directeur de la droite (AM) . ; pente.

B. Exploitation de la figure

1. a. Affecter à a la valeur 1.
- b. Cliquer sur le curseur h , déplacer M en faisant varier h à l'aide des touches $\leftarrow$ et $\rightarrow$ du clavier et constater que la sécante (AM) admet une position limite $\mathcal{D}$ quand M est très proche de A .

$\mathcal{D}$ est appelée **tangente à C_f au point d'abscisse 1**. Son coefficient directeur est appelé **nombre dérivé de f en 1** et on le note $f'(1)$.

- c. Que vaut $f'(1)$?

2. a. Toujours dans le cas où $a = 1$, exprimer le coefficient directeur de la sécante (AM) en fonction de h .

- b. Comment doit-on choisir h pour que M soit très proche de A ?

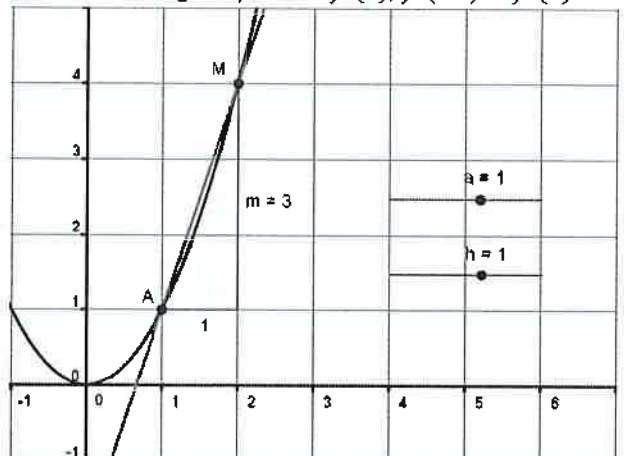
- c. Proposer une définition de $f'(1)$.

3. En déplaçant le point A sur la courbe C_f déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$.

4. a. Dans le cas où a est un réel quelconque, exprimer le coefficient directeur de la sécante (AM) en fonction de a et h .

- b. En utilisant la question 2. c et la question précédente, exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

- c. Retrouver algébriquement $f'(1)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.



1 Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

Exercice 4. 1 (29 p 120)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.
2. Calculer la pente de la sécante à la courbe de f passant par les points d'abscisses 0 et 2.

Exercice 4. 2 (CQFD 6 p 138)

1. Écrire une fonction Python `carre(x)` qui renvoie l'image de x par la fonction carré.

2. Saisir l'instruction suivante dans la console, puis expliquer son rôle.

```
entiers = [i for i in range(-3,8)]
```

3. On souhaite calculer les coefficients directeurs de dix sécantes à la courbe de la fonction carré issues du point $A(2; 4)$, pour un pas égal à 1. Pour ce faire, écrire une fonction Python utilisant certains des éléments de la liste `entiers`.

Exercice 4. 3 (39 p 120)

Pour chaque fonction suivante dont on donne une expression, déterminer, en utilisant la définition, le nombre dérivé en 3.

- a. $f(x) = x$ b. $g(x) = x^2$ c. $h(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 4. 4

Dans chaque cas montrer que f est dérivable en a , calculer $f'(a)$ et interpréter graphiquement le résultat.

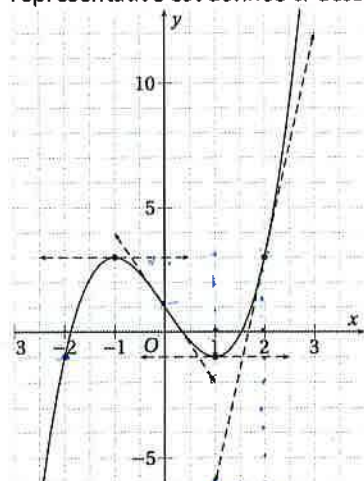
- a. $f(x) = x^2 + 3x + 7$; $a = 0$ c. $f(x) = x^3$; $a = 2$
 b. $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$; $a = -2$ d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $a = -1$

Exercice 4. 5 (84 p 123)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2|x - 2|$. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 4. 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement :
 - a. $f(0)$ et $f'(0)$;
 - b. $f(-1)$ et $f'(-1)$;
 - c. $f(2)$ et $f'(2)$;
- d. L'équation réduite de la tangente T_{-1} au point

d'abscisse -1 .

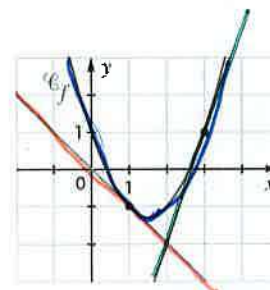
e. L'équation réduite de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.

2. La droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point $A(1; 26)$.

- a. Déterminer par le calcul une équation de T .
- b. En déduire $f'(2)$.

Exercice 4. 7 (34 p 120)

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 3.

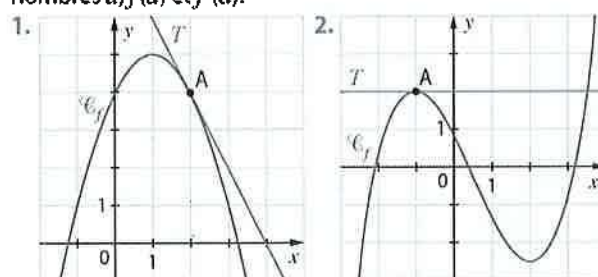


1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.
2. Déterminer graphiquement $f'(3)$.

Exercice 4. 8 (35 p 120)

Sur chacun des deux graphiques suivants sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable en a et sa tangente T au point d'abscisse a .

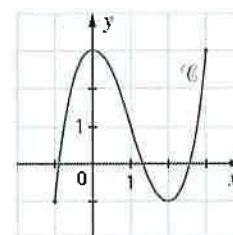
Dans chacun des cas, déterminer par lecture graphique les nombres a , $f(a)$ et $f'(a)$.



Exercice 4. 9 (37 p 120)

Soit g une fonction définie sur $[-1; 3]$ et dont la courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre. On admet que $g'(1) = -3$ et que $g'(2) = 0$.

Reproduire $\mathcal{C}$ puis tracer deux tangentes à l'aide des deux informations données.



Exercice 4. 10

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

1. Dans un repère orthogonal d'unité 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, placer les points de la courbe représentative de la fonction v d'abscisse -1 , $-\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$ et 2 .
2. Déterminer à l'aide d'une calculatrice les valeurs de $v'(-1)$, $v'(0)$, $v'(1)$ et $v'(2)$.
3. Tracer les tangentes à la courbe aux points d'abscisse -1 , 0 , 1 et 2 .
4. Tracer la courbe représentative de la fonction v sur $[-1; 2]$.

Exercice 4. 11 (12 p 118)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction g dérivable en 4 telle que $g(4) = 3$ et $g'(4) = 1$.

Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

1. Le coefficient directeur de T est-il égal à 4, à 3 ou à 1 ? Justifier.
2. Quelles sont les coordonnées du point de contact de T et de $\mathcal{C}$?

Exercice 4. 12

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie

sur $] -\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

- a. Calculer $g'(2)$.
- b. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

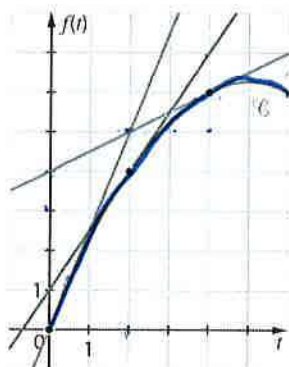
Exercice 4. 13 (91 p 124)

La position d'une bille sur sa trajectoire rectiligne est donnée par son abscisse $f(t)$ (en mètres), en fonction du temps t (en secondes).

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0, 2 et 4.

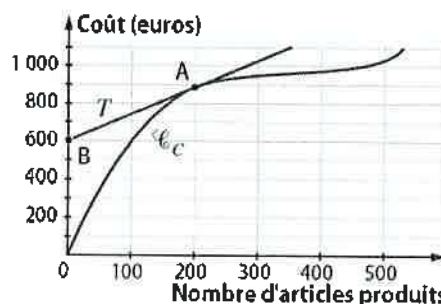
1. Déterminer $f'(0)$ par lecture graphique et interpréter le résultat.
2. Déterminer la vitesse de la bille aux instants :

- a. $t = 2$
- b. $t = 4$

**Exercice 4. 14** (95 p 125)

L'entreprise Sportymax fabrique des articles de sport.

Le coût total de fabrication de ces articles (en euros) est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative $\mathcal{C}_C$ est donnée ci-dessous. La tangente T à cette courbe au point $A(200; 880)$ passe par le point $B(0; 600)$.



1. On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 200^e article. Une valeur approchée de ce coût est le nombre dérivé de la fonction C en 200. Déterminer une valeur approchée de ce coût au rang 200.
2. Expliquer la démarche à réaliser graphiquement afin de déterminer le coût marginal le plus faible.

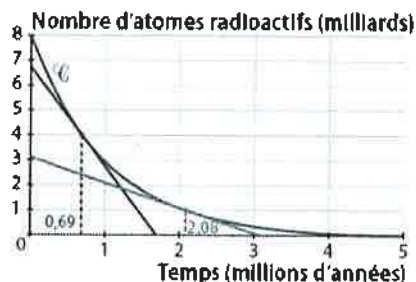
Exercice 4. 15 (96 p 125)

Pour dater certaines roches, on utilise la loi de décroissance radioactive sur des atomes comme le carbone 14.



On modélise le nombre d'atomes radioactifs, exprimé en milliards, en fonction du temps, exprimé en millions d'années, par une fonction N .

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et ses tangentes aux points d'abscisses 0,69 et 2,08 sont tracées ci-dessous.



1. Par lecture graphique, déterminer la vitesse de désintégration du nombre d'atomes :

- a. au bout de 690 000 ans ;
- b. au bout de 2 080 000 ans.

2. Conjecturer le lien entre le nombre d'atomes radioactifs et la vitesse de désintégration de ces atomes.

3. La vitesse de décroissance augmente-t-elle au cours du temps ou diminue-t-elle ? Expliquer.

2 Déterminer la dérivée d'une fonction usuelle**Exercice 4. 16**

Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer sa fonction dérivée.

- a. $f(x) = -2x + 5$;
- b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
- c. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2$;
- d. $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$;
- e. $f(x) = \frac{4}{x}$;
- f. $f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{x}$;
- g. $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{3x}{2}$;
- h. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x^3 - 1$;
- i. $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x}$;
- j. $f(x) = x^2 - \frac{3\sqrt{x}}{4}$;
- k. $f(x) = \frac{5+\sqrt{x}}{2}$;
- l. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6}$;
- m. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x$;
- n. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x$;

$$e. f(x) = x^2\sqrt{2} - x\sqrt{5}; \quad l. f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x};$$

$$f. f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6}; \quad m. f(x) = x^2 - \frac{3\sqrt{x}}{4};$$

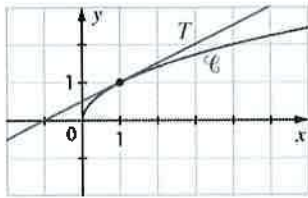
$$g. f(x) = \frac{1}{x} + 5x; \quad n. f(x) = \frac{5+\sqrt{x}}{2}.$$

Exercice 4. 17 (44 p 121)

On considère ci-dessous

la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

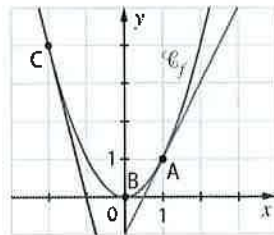
et sa tangente au point d'abscisse 1.



1. a. Déterminer $f'(1)$ par lecture graphique.
b. Retrouver ce résultat par un calcul.
2. Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer sa tangente au point d'abscisse 4.
3. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 5$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.
4. Expliquer pourquoi aucune tangente de $\mathcal{C}$ n'a une pente négative.

Exercice 4. 18 (42 p 121)

On a tracé ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et ses tangentes en trois points A, B et C.



- a. Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.
- b. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
- c. Vérifier par calculs les résultats de la question a..

Exercice 4. 19 (45 p 121)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 2.
2. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}$, distinct de A, en lequel la tangente est parallèle à T .
3. Soit a un réel non nul. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives $-a$ et a sont parallèles.

Exercice 4. 20 (48 p 121)

Soit i la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = \frac{1}{x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 4. 21 (71 p 122)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x.$$

1. Déterminer l'expression de f' .
2. En déduire que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

Exercice 4. 22 (72 p 122)

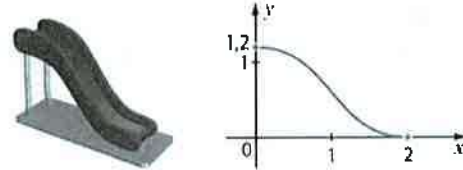
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$ et $g(x) = -2x^2 + 2x - 3$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente Δ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 1 sont parallèles.
2. Les tangentes T et Δ sont-elles confondues?

Exercice 4. 23 (116 p 134)

On souhaite modéliser le profil d'un toboggan, de hauteur 1,20 mètre et de longueur 2 mètres, par la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



On se propose de déterminer les réels a , b , c et d tels que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A (0 ; 1,2) et B (2 ; 0) ;
- en ces deux points A et B, la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

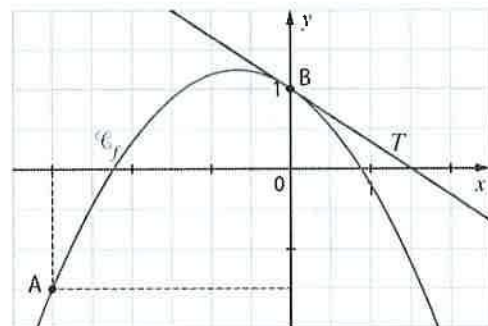
1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
2. a. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
b. En déduire les valeurs de c et d .
3. a. Indiquer les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.
b. Montrer que les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 8a + 4b + 1,2 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$
- c. Calculer les réels a et b puis donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 4. 24 (73 p 122)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels.

On a tracé sa courbe ci-dessous, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.



À partir de ces informations, déterminer l'expression de f .

Exercice 4. 25 (88 p 123)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.

1. Écrire une équation de la droite T .
2. Vérifier que, pour tout réel x , $x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$.
3. a. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
b. Vérifier à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 4. 26 (92 p 124)

Pour tester la sécurité des voitures, de nombreux essais sont effectués comme le lancement en ligne droite et à vive allure d'une voiture qui percute un mur. Durant ce test, on note $x(t)$ la distance en mètres parcourue par le véhicule t secondes après son départ. La voiture percute le mur au bout de 4 secondes.

On admet que pour tout $t \in [0; 4]$, $x(t) = t^3 + 0,45t^2$.
 x est donc une fonction de la variable t .

1. Déterminer l'expression de la dérivée de x .

On pourra la noter comme en physique $\frac{dx}{dt}$.

2. En déduire la vitesse instantanée en $m \cdot s^{-1}$, puis en $km \cdot h^{-1}$, de la voiture au démarrage, puis lors de l'impact. On arrondira si besoin à l'unité.

Exercice 4. 27 (93 p 125)

Une entreprise fabrique de la peinture. Le coût de fabrication, exprimé en euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur $[1; 100]$ par :

$$C(x) = 0,001x^3 - 1,2x^2 + 600x + 500.$$

1. a. Quel est le coût de production exact de 50 tonnes de peinture ? de 51 tonnes ?

b. En déduire l'augmentation du coût entraînée par la fabrication de la 51^e tonne de peinture.

2. On appelle coût marginal au rang x la différence $C(x) - C(x-1)$. On note $d(x)$ cette différence.

a. Quel est le coût marginal au rang 50 ?

3. On note C' la dérivée de la fonction C .

a. Calculer $C'(x)$, puis $C'(50)$.

b. Calculer $d(50)$ et comparer à $C'(50)$.

c. Que constate-t-on ?

3 Déterminer la dérivée d'une fonction

Exercice 4. 28

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$

b. $f(x) = (5\sqrt{x}-4) \times \frac{1}{x}$

c. $f(x) = (x^2-3)(4x-5)$

d. $f(x) = 3(10x^2-1)(5x^2-x+4)$

e. $f(x) = \left(-\frac{2}{x}+1\right)(x^2+3)$

f. $f(x) = (-x+3)(1-\sqrt{x})$

g. $f(x) = (3x^2+4x-1)(2x^4-6x^3+2x-1)$

h. $f(x) = 4(2x^2-5x+1)(x^5-8x^4+x-3)$

Exercice 4. 29

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

d. $f(x) = -\frac{5}{x^2-1}$

b. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4\sqrt{x}}$

e. $f(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{x^4}$

c. $f(x) = -\frac{4}{x^2+3}$

f. $f(x) = \frac{2}{x^3+x-1}$

Exercice 4. 30

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = \frac{-x+2}{2x+5}$

d. $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^2-4}$

b. $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-5x+4}$

e. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$

c. $f(x) = \frac{2x-x^2}{x-2}$

f. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

Exercice 4. 31

Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonction définies par :

a. $f(x) = (-3x+4)^3$

d. $f(x) = (2x+1)^4$

b. $f(x) = \sqrt{2x-10}$

e. $f(x) = \sqrt{6-2x}$

c. $f(x) = \frac{3}{2(x+2)^4}$

f. $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x}$

Exercice 4. 32 (89 p 123)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-2}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Vérifier que, pour tout x de I , $f(x) = 2 + \frac{8}{x-2}$.

b. Calculer $f'(x)$ en utilisant cette expression.

Vérifier la cohérence avec la réponse apportée à la question 1..

3. a. Calculer le nombre dérivé de f en 3.

b. Montrer que la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite $y = -8x + 34$.

4. a. Montrer que, pour tout réel x de $]2; +\infty[$,

$$f(x) - (-8x + 34) = \frac{8(x^2 - 6x + 9)}{x-2}.$$

b. En déduire la position relative de T et $\mathcal{C}$ sur I .

Exercice 4. 33

**

Définition :

Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle I .

Dire que ϕ est deux fois dérivable sur I veut dire que ϕ est dérivable sur I et que sa dérivée ϕ' est dérivable sur I .

Dans ce cas on note ϕ'' ou $\phi^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de ϕ .

Plus généralement, sous réserve d'existence, si $n \in \mathbb{N}^*$, dire que ϕ est n fois dérivable sur I signifie que $\forall k \leq n-1$, $\phi^{(k)}$ est dérivable (avec $\phi^{(0)} = \phi$).

Dans ce cas on note $\phi^{(n)} = (\phi^{(n-1)})'$.

Soit $f : x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$. On suppose que

f est n fois dérivable sur $\mathcal{D}$, quelque soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer l'expression de la dérivée n -ième de f . On admet que cette conjecture est vraie.

3. Trouver tous les réels x tels que $f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 4. 34

**

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^*$, la dérivée logarithmique de u est la

$$\text{fonction } L(u) = \frac{u'}{u}.$$

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , à valeur dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et de v .

2. Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Calculer la $L(P)$.

Exercice 4. 35

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire. Que dire de f' ? *

Même question si f est paire, si f est périodique, de période T .

Exercice 4. 36

Soient a un réel non nul et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2$.

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe d'abscisses x_1 et x_2 . *

5 Dérivation : application à l'étude de fonctions

1 Fonction dérivée et variations

Propriété 5.1

variations et signe de la dérivée

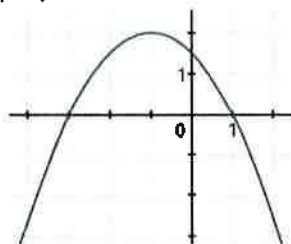
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \leq 0$.

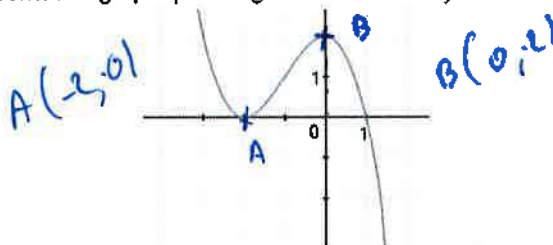
Dans chacun de ces deux cas, si de plus f' s'annule qu'un nombre fini de fois alors f est strictement monotone.

- f est constante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) = 0$.

1. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dédurre de cette représentation graphique le sens de variation de la fonction f .



2. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dédurre de cette représentation graphique le signe de la fonction f' .



Exemple 5.1

3. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 9x^2 + 15x - 1$.
Etudier les variations de f .
4. Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et dont la dérivée est donnée par $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.
- Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.
 - Calculer $G(0)$ et en déduire que F est une fonction impaire.

2 Extremums d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Définition 5.1

maximum, minimum, extremum, extremum local

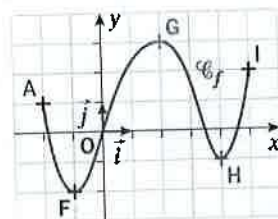
- Le réel M est le maximum de f sur I si il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq M$.
On dit alors que le maximum M de f sur I est atteint en a .
- Le réel m est le minimum de f sur I si il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = m$ et si pour tout réel $x \in I$, $m \leq f(x)$.
On dit alors que le minimum m de f sur I est atteint en a .
- On appelle extremum de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I .
- On dit que le réel α est un extremum local de f sur I si il existe un intervalle ouvert $J \subseteq I$ tel que α soit un extremum de f sur J .

Remarque : si f est définie sur un intervalle $[a; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas, par définition, des extremums locaux.

Exemple 5.2

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur un intervalle $I = [-2; 5]$.

1. Quel est le maximum de f sur I , en quelle valeur est-il atteint ?
2. Quel est le minimum de f sur I , en quelle valeur est-il atteint ?
3. f admet-elle des extremums locaux sur I ?

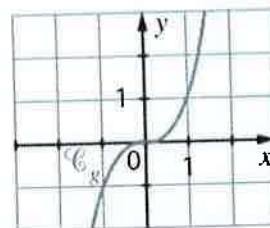
**Propriété 5.2**

caractérisation d'un extremum local

Soit α un réel de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I .

- Si f admet un extremum local en α alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si $f'(\alpha) = 0$ et f' change de signe en α alors f admet un extremum local en α .

Remarque La réciproque du premier point est fausse. Par exemple la dérivée de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ s'annule en 0 et mais g n'a pas d'extremum local.

**Exemple 5.3**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-2; 4]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.
Etudier les variations de f et en déduire les extremums de f sur I .

Démonstration 1 : Caractérisation d'un extremum local

Résultat admis

Si g est une fonction définie sur un intervalle J , ne changeant pas de signe sur J et telle que $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est du même signe que celui de g sur J .

Soit f une fonction dérivable et non constante sur un intervalle $]a; b[$ et $c \in]a; b[$.

1. Montrer que si $f'(c)=0$, $f'(x) \geq 0$ sur $]a; c]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $]c; b[$, alors $f(c)$ est un extremum local de f .

On démontre de même que si $f'(c)=0$, $f'(x) \leq 0$ sur $]a; c]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $]c; b[$, alors $f(c)$ est un extremum local de f .

2. On suppose dans cette question que $f(c)$ est le seul extremum local de f sur $]a; b[$ et que c'est un maximum.

a. Soit $h \neq 0$ tel que $c+h \in]a; b[$.

Préciser, en justifiant, le signe du taux d'accroissement

$$\tau_c(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

On distinguera les cas $h > 0$ et $h < 0$.

b. En déduire que $f'(c)=0$.

c. Supposons que f' ne change pas de signe en c et considérons s et t dans $]a; b[$ tels que $s < t$ et $c \in [s; t]$.

En distinguant les cas $f'(x) \geq 0$ sur $[s; t]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[s; t]$, montrer que cela contredit l'hypothèse « $f(c)$ est le seul maximum local de f sur $]a; b[$ », puis conclure.

On démontre de même que si $f(c)$ est un minimum de f sur $]a; b[$, alors $f'(c)=0$ et f' change de signe en c .

Démonstration 2 : Caractérisation des fonctions constantes

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que $f'(x)=0$ pour tout $x \in I$. Justifier le fait que f est à la fois croissante et décroissante sur I .

En déduire que, pour tous nombres a et b de I , on a $f(a)=f(b)$.

2. Que reste-t-il à montrer pour prouver cette caractérisation des fonctions constantes ?

Activité 1 : trouver un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [-3; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

1. a. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative C de f .

b. Par lecture graphique dresser le tableau de variations de f sur I .

2. Semble-t-il possible d'obtenir un nombre dérivé $f'(a)$ négatif lorsque $a \in [-3; -1]$?

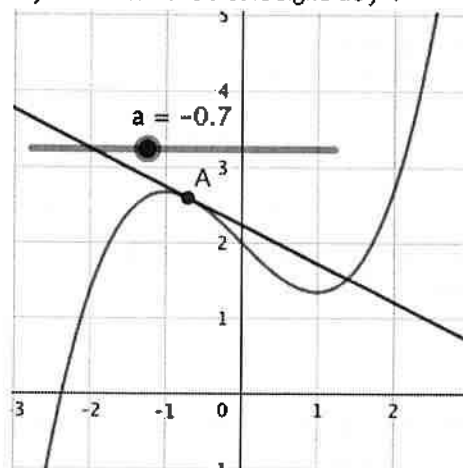
3. a. A l'aide du logiciel, créer un curseur a (compris entre -3 et 3) avec un pas de $0,1$.

Définir le point $A(a; f(a))$.

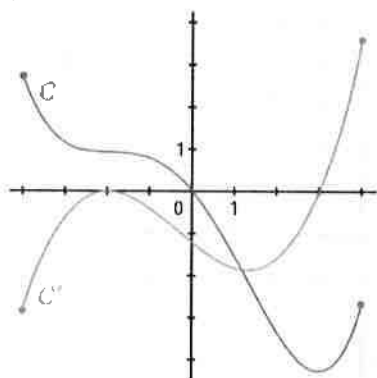
Tracer la tangente à la courbe représentative C en A et afficher son équation réduite dans la fenêtre.

b. A partir de cette équation lire le nombre dérivé $f'(a)$ pour différentes valeurs de a (faire varier le curseur).

4. Conjecturer un lien entre le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I et le signe de f' .

**Activité 2 :** trouver un lien entre les extremums d'une fonction et les valeurs de sa dérivée

On donne ci-dessous la courbe C représentative d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ ainsi que la courbe C' représentative de la fonction h' , fonction dérivée de h .



1. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction h' s'annule-t-elle ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction h' s'annule-t-elle en changeant de signe ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe C admet-elle une (des) tangente(s) parallèle(s) à l'axe (Ox) ?

4. Pour quelle valeur de x la fonction h change-t-elle de sens de variation ?

5. Pour quelle valeur de x la fonction h atteint-elle son minimum ?

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} \text{ ainsi que sa fonction dérivée définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2.$$

a. Représenter la courbe de ces deux fonctions à la calculatrice.

b. Répondre aux questions 1 à 5 avec les fonctions f et f' .

Etudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Exercice 5. 1 (18 p 146)

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $[-10; 10]$.

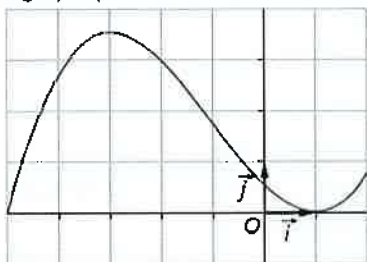
x	-10	0	5	10
$f(x)$	-5	-1	-3	4

Quel est le signe de la dérivée de la fonction f sur :

- a. $[-10; 0]$ b. $[0; 5]$ c. $[5; 10]$

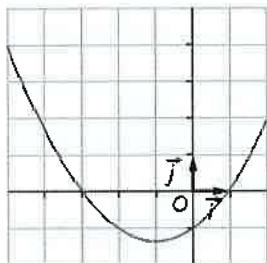
Exercice 5. 2

Soit f la fonction définie sur $[-5; 2]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

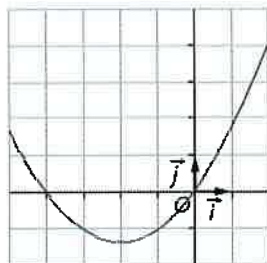


Associer à cette fonction la représentation graphique de sa fonction dérivée.

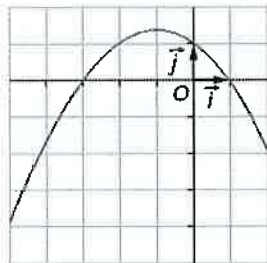
a.



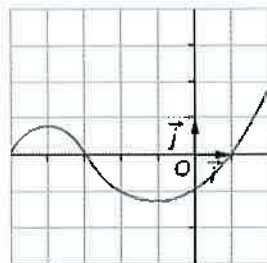
c.



b.

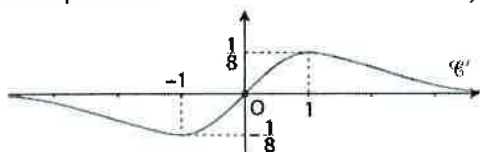


d.

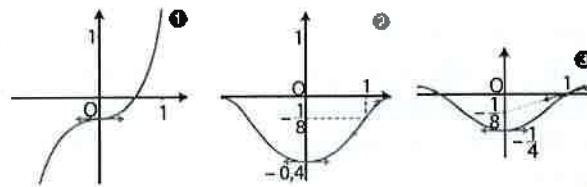


Exercice 5. 3

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C' de sa fonction dérivée f' .



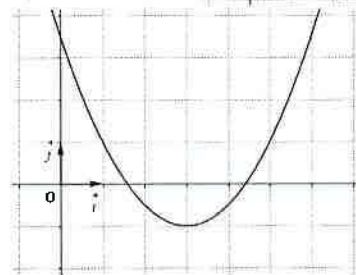
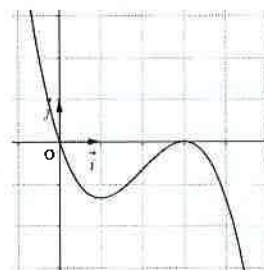
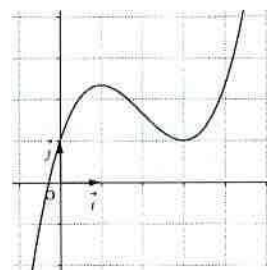
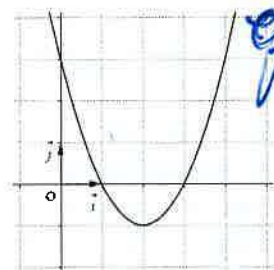
- a. Par lecture graphique déterminer le sens de variation de f .
 b. Parmi les courbes suivantes laquelle pourrait être celle de f ?



Exercice 5. 4

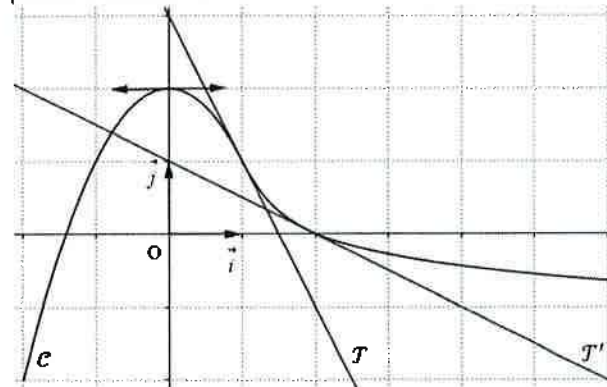
On a représenté ci-contre la fonction dérivée d'une fonction f .

Laquelle des trois courbes tracées ci-dessous est celle de f ?



Exercice 5. 5

Soit $I = [-2; 6]$. Sur le graphique ci-dessus, la courbe C représente une fonction f dérivable sur I . Les droites T et T' sont les tangentes à la courbe, respectivement aux points d'abscisse 1 et 2.



1. Reproduire et compléter, à l'aide de lectures graphiques, le tableau suivant.

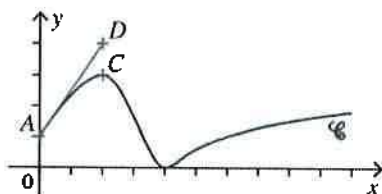
x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0
$f'(x)$	0	-2	-1/2

2. Résoudre graphiquement dans I les équations et inéquations :

- a. $f(x) = 1$; b. $f(x) < 1$;
c. $f'(x) = 0$; d. $f'(x) < 0$.

Exercice 5. 6 (Barbazo 75 p 168)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ dont on donne la représentation graphique.



Les coordonnées des points indiqués sont $A(0; 1)$, $D(2; 4)$ et $C(2; 3)$.

La droite (AD) est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La courbe rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

On sait aussi que $f(6) = 1$ et que la tangente au point d'abscisse 6 passe par le point $E(3; 0)$.

1. Par lecture graphique :

- a. déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(6)$;
b. déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6 ;
c. dresser le tableau de signes de f' .

2. On considère la fonction g définie par $g = \frac{1}{f}$.

- a. Déterminer le domaine de définition de g .
b. Donner l'expression de g' à l'aide de f et de f' .
c. En déduire le sens de variation de g .

Exercice 5. 7 (47 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2$ où $I = \mathbb{R}$
b. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 2$ où $I = \mathbb{R}$

Exercice 5. 8 (48 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ où $I =]0; +\infty[$
b. $f(x) = 3 - \frac{5}{x}$ où $I =]0; +\infty[$

Exercice 5. 9 (49 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$ où $I =]2; +\infty[$
b. $f(x) = \frac{4x-7}{2x-2}$ où $I =]1; +\infty[$

Exercice 5. 10 (50 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ où $I = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ où $I = \mathbb{R}$

Exercice 5. 11 (51 p 149)

Etudier les variations de la fonction f définie sur I .

- a. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 3}$ où $I = \mathbb{R}$
b. $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + x}$ où $I = \mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0\}$

Exercice 5. 12 (56 p 150)

Un médicament antalgique est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heures, associe la concentration $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L). La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

- a. Calculer $f''(x)$.
b. Déterminer le signe de $f''(x)$ sur $[0; 6]$.
c. Étudier le sens de variation de f sur $[0; 6]$ et construire son tableau de variation.
d. L'affirmation « Au bout de 3 heures, il y a davantage de produit actif dans le sang qu'au bout de 2 heures. » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 5. 13 (54 p 149)

Les nombres a, b, c et d sont des réels donnés, et c est non nul.

La fonction f est définie sur l'intervalle $I =]-\frac{d}{c}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

- a. Montrer que, pour tout réel x de I , on a $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
b. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour que la fonction `var` retourne le booléen `True` si f est croissante sur I et le booléen `False` si f est décroissante sur I .

```
1 def var(a,b,c,d):
2     V=...
3     return(...)
```

Exercice 5. 14

m est un réel et f la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{x - m}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier, selon les valeurs du réel m , les variations de la fonction f .

Exercice 5. 15 (Barbazo 62 p 166)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1,$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$



On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g .

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$.

b. Étudier le signe de $h(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.

4. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner une équation de cette tangente.

Exercice 5. 16 (livrescolaire 100 p 154)

Partie A :

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
2. Calculer $g(1)$ puis conjecturer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2}{x^2 + 1}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Peut-on trouver des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -2x$? Si oui, préciser leurs abscisses respectives.

Exercice 5. 17

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 7X + 10$.
2. En déduire une factorisation du polynôme : $p(x) = x^4 - 7x^2 + 10$.
3. Déterminer le signe de $p(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f et expliquer pourquoi on peut restreindre son étude à $[0; +\infty[$.
3. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + 1)^2}$.
- b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
- c. Donner les variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. a. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point 1.
- b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .
- c. Déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à T .

quel dir déjà connu

Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

Exercice 5. 18 (65 p 150)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 4]$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$.

- a. Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.
- b. Déterminer les extremums (éventuellement locaux) de f sur $[-1; 4]$.
- c. Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 3 ?

Exercice 5. 19 (67 p 150)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 2}$.

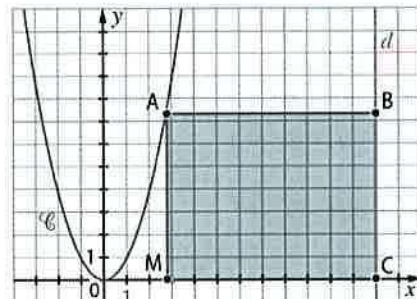
- a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5; 1]$.
- b. Quel est le minimum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
- c. Quel est le maximum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 5. 20 (70 p 151)

Le nombre n est un entier supérieur ou égal à 1. On considère n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$. Montrer que f admet un minimum et préciser en quelle valeur il est atteint.

Exercice 5. 21 (82 p 152)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation $x = 12$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x; 0)$ avec x réel compris entre 0 et 12, on construit le rectangle ABCM comme sur la figure ci-dessous.

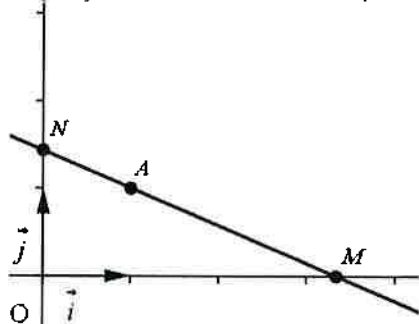


1. Déterminer, en fonction de x , les coordonnées des points A, B et C.
2. Montrer que l'aire du rectangle MABC est égale à $-x^3 + 12x^2$.
3. On considère la fonction f définie sur $[0; 12]$ par : $f(x) = -x^3 + 12x^2$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.
 - b. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer la position du point M rendant l'aire du rectangle MABC maximale et préciser cette aire.

Exercice 5. 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

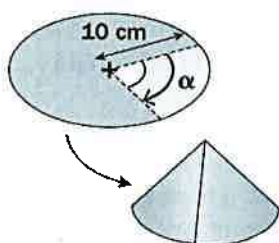
1. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$.
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. A tout réel $m > 1$ on associe le point M de coordonnées $(m; 0)$ et on note N le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées, où $A(1; 1)$.



- a. Démontrer que N a pour coordonnées $(0; \frac{m}{m-1})$.
- b. Montrer que l'aire du triangle OMN est égale à $f(m)$.
- c. Quelle est la position du point M pour laquelle l'aire du triangle OMN est minimale ?

Exercice 5. 23 (Hatier 71 p 155)

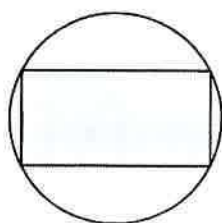
À partir d'un disque en carton souple de rayon 10 cm que l'on découpe sur un rayon et en faisant chevaucher le carton sur un angle α donné, on fabrique un chapeau de forme conique comme sur la figure ci-contre.



- Calculer | Parmi tous les chapeaux possibles construits selon cette méthode, quel est celui de volume maximal ? Quelle est sa hauteur ?

Exercice 5. 24 (Barbazo 79 p 169) Ca1, 2

On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1.



- Déterminer les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale.

Exercice 5. 25 (Barbazo 80 p 169)

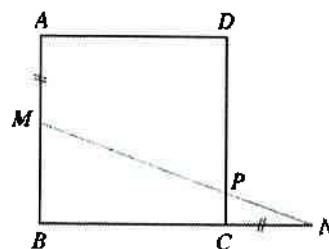
$ABCD$ est un carré de côté 1.

M est sur le segment $[AB]$.

On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC]$ à l'extérieur du segment $[BC]$.

La droite (MN) coupe (DC) en P .

On pose $AM = x$ avec $0 \leq x \leq 1$.



Le but de l'exercice est de trouver M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.

1. Exprimer BM et BN en fonction de x .

2. Montrer que $PC = \frac{-x^2 + x}{x + 1}$.

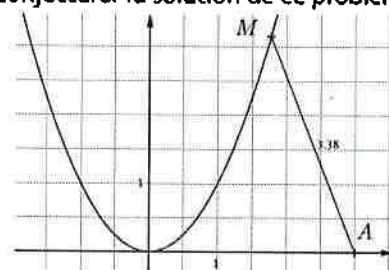
3. En déduire la position du point M maximisant la longueur PC .

Exercice 5. 26 (Déclic 94 p 126)

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. On note A le point de coordonnées $(3; 0)$ et M un point mobile sur $\mathcal{P}$ d'abscisse $x \geq 0$.

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M sur $\mathcal{P}$ telle que la longueur AM soit minimale.

1. Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer la solution de ce problème.



2. Justifier que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale.

3. On note d la fonction qui à tout réel x positif associe AM^2 .

- a. Montrer que $d(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.

- b. Montrer que la dérivée de la fonction d vérifie :

$$d'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 6)$$

- c. Étudier les variations de la fonction d sur $[0; +\infty[$

4. Conclure.

Exercice 5. 27 (84 p 152)

Une entreprise vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large. On note x sa longueur exprimée en kilomètres, x étant un réel compris entre 0 et 10.



Le coût total de production en euros de ce tissu est donné, en fonction de x , par $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000$. Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de

tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. a. Déterminer le montant des coûts fixes.
- b. Calculer le coût de production, la recette et le bénéfice générés par la production et la vente de 4 kilomètres de tissus.
- c. Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
2. a. Montrer que, pour tout réel de $[0; 10]$:

$$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000.$$
- b. Déterminer $B'(x)$.
- c. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
3. a. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?
- b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 5. 28 (TP2 p 159)

Une entreprise fabrique une pâte à cookies dont le coût total journalier de production (exprimé en centaines d'euros) pour x litres de pâte est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $I = [1; 50]$ par $C(x) = 0,75x^2 + 3x + 315$.

A Quelques calculs de coûts

- a. Calculer le coût fixe journalier de l'entreprise.
- b. Calculer le coût total de production de 20 litres de pâte à cookies.

B Coût moyen

1. Exprimer le coût moyen de production d'un litre de pâte $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$, avec x dans $[1; 50]$.
2. Calculer le coût moyen de production d'un litre quand on produit 20 litres.
3. a. Représenter la fonction C_M à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.
- b. Conjecturer graphiquement la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.
4. a. Déterminer la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.
- b. Déterminer ce coût moyen minimum.

C Coût marginal

1. Le coût marginal est le supplément de coût engendré pour produire un litre supplémentaire de pâte.
 - a. Exprimer le coût marginal $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$ en fonction de x .
 - b. Déterminer le coût marginal pour une production de 20 litres de pâte à cookies.
2. Les économistes prennent souvent comme valeur approchée de $C_m(x)$ la valeur $C'(x)$.
 Déterminer $C'(x)$ et justifier cette approximation.

D Une égalité de coûts

- a. Représenter sur un même graphique les courbes repré-

sentatives des fonctions C , C_m et C_M avec un logiciel ou une calculatrice.

- b. Résoudre graphiquement l'équation $C_M(x) = C_m(x)$.
 Quel résultat de la partie B retrouve-t-on ?
- c. Résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$.

Exercice 5. 29

1. Soit f la fonction définie sur $[5; 20]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1000}{x}.$$

- a. Exprimer $f'(x)$ et vérifier que

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}.$$

- b. Construire le tableau de variations de f sur $[5; 20]$.
 Quel est le minimum de f sur $[5; 20]$?
2. Une casserole est constituée d'un fond de rayon x et d'un cylindre de hauteur h .
 - a. Exprimer la surface $\mathcal{F}$ du fond de la casserole en fonction de x , puis la surface latérale $\mathcal{L}$ du cylindre et le volume $\mathcal{V}$ de la casserole, en fonction de x et h .
 - b. On souhaite construire une casserole de volume imposé $1000\pi \text{ cm}^3$. Calculer h en fonction de x et exprimer la surface totale $\mathcal{S}(x)$ nécessaire.
3. a. Montrer que $\mathcal{S}(x) = 2\pi f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la question 1. En déduire les variations, sur l'intervalle $[5; 20]$, de la fonction $\mathcal{S}$.
- b. Quelles sont les dimensions d'une casserole de $1000\pi \text{ cm}^3$ qui utilise le moins de tôle possible ? Quelle est alors cette surface ?

Exercice 5. 30

Soient x et y deux nombres positifs de somme égale à 1. Soit n un entier naturel.
 Déterminer x et y pour que le produit $P = x^n \times y$ soit maximal.

Exercice 5. 31 (71 p 151)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x - 3.$$

- a. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- b. Vérifier que $f(1) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $x^3 \geq 3 - 2x$.

Exercice 5. 32 (73 p 151)

- a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- b. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 5. 33 (116 p 163)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a $0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

4. a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 b. En déduire un intervalle sur lequel on a $f(x) < 10^{-3}$.
 5. Retrouver le résultat de la question 3. en utilisant l'expression $(\sqrt{x} - 1)^2$.

Exercice 5. 34 inégalité de Bernoulli

n est un entier naturel fixé et t un nombre réel positif. On note (B_n) l'inégalité $(1+t)^n \geq 1+nt$.

1. Vérifier que B_0 et B_1 sont vraies.
 2. On suppose $n \geq 2$ et on considère sur $\mathbb{R}_+$ la fonction φ définie par $\varphi(t) = (1+t)^n - 1 - nt$.
 a. Calculer $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$.
 b. Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) \geq 0$.
 c. En déduire l'inégalité (B_n) .

Exercice 5. 35

Soit f la fonction définie sur $I =]-4; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3-2}{x+4}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
 2. Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2.$$

 Etudier les variations de g sur I et en déduire que $\forall x \in I$, $g(x) > 0$.
 3. Déduire de la question précédente le signe de f' sur I puis les variations de f sur I .

Exercice 5. 36 (79 p 151)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2; 6]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 8.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. a. Calculer $f'(x)$.
 b. Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation sur $[-2; 6]$.
 c. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}$.
 2. Soit g la fonction définie sur $[-2; 6]$ par $g(x) = f(x) - (-6x + 12)$.
 a. Justifier que g est croissante sur $[-2; 6]$.
 b. Calculer $g(2)$.
 c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[-2; 6]$.
 3. Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geq -6x + 12$? Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$ et pour la tangente T ?
 4. Construire la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T et les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse 0 et 4.

Exercice 5. 37 (80 p 152)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$ et $g(x) = 27x - 5$ et leurs courbes respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ dans un repère.

Déterminer la position relative de ces deux courbes.

Exercice 5. 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités 2 cm.

1. Donner l'expression de $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier les variations de f et construire son tableau de variations sur $[-1; 3]$.

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

- b. Existe-t-il d'autres points de la courbe en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à T ?

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (-3x + 2).$$

- a. Justifier que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
 b. Calculer $g(1)$.
 c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 d. Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geq -3x + 2$?

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ et pour T ?

5. Construire la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T et les tangentes aux points d'abscisse 0 et 2.

Exercice 5. 39

φ est la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ où a et b sont deux réels à déterminer. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quels sont les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction φ ?
 2. Déterminer a et b pour que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ait pour équation $y = 4x + 3$.
 3. Préciser les positions de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.
 4. Dresser le tableau de variations de la fonction φ .
 5. φ admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}$? Si oui lesquels?
 6. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 3$.
 7. Tracer la courbe représentative de la fonction φ .

Exercice 5. 40 (89 p 153)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[26; 27]$ par $f(x) = x^2 - 720$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

On admet ici que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur $[26; 27]$ et le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

1. On considère le point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 = 26$.
 a. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}$ au point B .
 b. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection I_1 de $\mathcal{T}_0$ et de $\mathcal{C}$.
 2. On définit par le même processus les points $B_1, B_2, \dots, B_n$ (voir algorithme page 145).
 a. Montrer qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point B_n d'abscisse x_n est $y = 2x_n x - x_n^2 - 720$.
 b. En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .
 c. En utilisant un algorithme comme celui présenté page 145, donner une valeur approchée de α .

Exercice 5. 41 (inégalité des accroissements finis)

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a; b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$.

Montrer que $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

On pourra considérer les fonctions $g : x \mapsto f(x) - Mx$ et $h : x \mapsto f(x) - mx$.

Exercice 5. 42

*

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

On pourra considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(-x)$.

2. Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et $f(0) = 0$.

Exercice 5. 43

**

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

a. on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T .

b. Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a.

Exercice 5. 44

*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I , f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

On se propose de montrer que le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point a . On pose, pour tout x dans I :

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Calculer $g''(x)$ et $g'(a)$.

Déterminer le signe de $g'(x)$, donner le tableau de variations de g et conclure.

Les fonction possédant la propriété précédente sont dites convexes.

6 Fonction exponentielle

Définition 6.1*fonction exponentielle*

On admet qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, on la note $\exp$.

Avec la notation introduite ci-contre la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$;
- $\exp 0 = 1$.

Remarque : la preuve de la propriété précédente permettrait de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

La fonction exponentielle vient compléter la liste des fonctions de référence. Sa définition n'est pas explicite mais les conditions énoncées suffisent à la préciser. On cherche, dans la suite du chapitre à connaître plus précisément cette fonction : propriétés, variations, courbe, etc.

Propriété 6.1*propriétés algébriques*

- i. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
- iii. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$;
- ii. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp x)^n$.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle évoquent les propriétés connues sur les exposants. Pour formaliser cette observation on introduit une nouvelle notation. En posant $e = \exp(1)$ (nombre d'Euler ou constante de Néper, $e = 2,718$ à 10^{-3} près), quelque soit l'entier n on a $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$. En étendant cette égalité à l'ensemble des réels on a, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$. On peut alors reformuler les résultats précédents :

Propriété 6.2*propriétés algébriques*

- i. $e^0 = 1$;
- iii. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- v. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- ii. $\exp'(x) = e^x$;
- iv. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- vi. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$.

Exemple 6.1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les égalités suivantes :

a. $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

b. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2. Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^{2x} \times (e^{-x})^3$

b. $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$

c. $\frac{e^{3x}}{e^x(e^x)^2}$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}}$, alors $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$, ce qui montre que, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 0$. De plus on sait, d'après la remarque précédente, que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$. En utilisant conjointement ces deux résultats on peut écrire la propriété suivante :

Propriété 6.3*signe de la fct exponentielle*

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

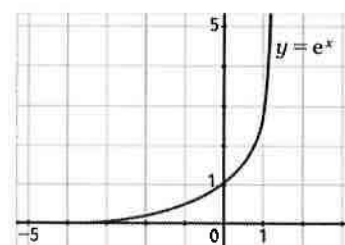
Exemple 6.2

Etudier la monotonie de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.

Propriété 6.4*monotonie*

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$			+	
$\exp$		1	e	



La stricte monotonie de la fonction exponentielle permet d'énoncer des équivalences entre égalités et des équivalences entre inégalités permettant de résoudre des équations et des inéquations où figurent des exponentielles.

Propriété 6.5*équations, inéquations*

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; - $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Exemple 6.3

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $e^{3x-1} = 1$;

b. $(e^{3-x})^2 - e^2 = 0$;

c. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(e^x + 1)(e^{-3x} - 1) > 0$;

b. $(x + 3)e^{x^2-2} \leq 0$;

c. $(e^x)^2 \leq \frac{1}{e^2}$.

Si a et b sont deux réels alors la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ où la fonction exponentielle est dérivable. D'après la propriété 4. 5 on peut alors énoncer le résultat suivant :

$$(e^u)' = u' e^u$$

Propriété 6. 6
dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax+b}$

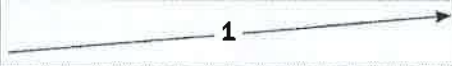
$f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a e^{ax+b}$.

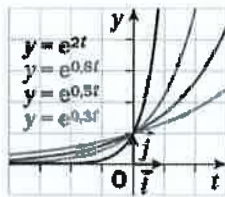
Exemple 6. 4 | Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^{3x+1}$

Conséquence

Soit k un réel strictement positif

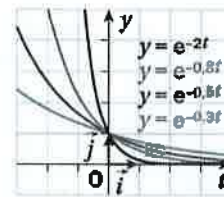
La fonction $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{kt}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f_k			



La fonction $g_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-kt}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g_k			



Soient a et b deux nombres réels.

Propriété 6.7

monotonie de la suite (e^{nb})

La suite (e^{nb}) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^b .

$b > 0 \Rightarrow (e^{nb})$ croissante

$b = 0 \Rightarrow (e^{nb})$ constante

$b < 0 \Rightarrow (e^{nb})$ décroissante

Exemple 6.5

Déterminer la raison, le premier terme et la monotonie des suites géométriques suivantes.

a. $u_n = e^{-3n}$;

b. $u_n = e^{3n+4}$;

c. $u_n = 10e^{10n-1}$;

d. $u_n = 2e^{\frac{n}{e}}$.

Définition 6.2

Un phénomène (physique, économique, etc) se modélise de façon discrète par une croissance (resp décroissance) exponentielle s'il peut être modélisé par une suite dont la représentation graphique est un nuage de points appartenant à une courbe représentative d'une fonction dont l'expression est de la forme $f(t) = ae^{bt}$ avec $a > 0$ (resp $a < 0$).

Définition 6.3

Un phénomène (physique, économique, etc) se modélise de façon continue par une croissance (resp décroissance) exponentielle s'il peut être modélisé par une fonction dont l'expression est de la forme $f(t) = ae^{bt}$ avec $a > 0$ (resp $a < 0$).

D1 – Unicité

Rappels :

1. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

• Dérivation d'un produit : uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

• Dérivation d'un quotient : si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et m et p deux réels.

Alors $x \mapsto g(mx + p)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x \mapsto m \times g'(mx + p)$.

On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Pour tout réel x , on pose $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

a. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée de h .

En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer h . En déduire que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose qu'il existe une fonction g , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Pour tout réel x , on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

a. Justifier que k est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis, pour tout réel x , calculer $k'(x)$.

En déduire que la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer k . En déduire que les fonctions f et g sont égales, puis que la fonction f est unique.

CORRIGÉ

1. a. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En appliquant la proposition de dérivée d'un produit ainsi que la proposition de dérivée de la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ (ici, $m = -1$ et $p = 0$) avec la fonction f , on obtient, pour tout réel x :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x).$$

Or, $f' = f$. Donc, pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$. Donc $h'(x) = 0$.

La dérivée de la fonction h est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

D'après la caractérisation des fonctions constantes, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b. h étant constante sur $\mathbb{R}$, pour obtenir la valeur de cette constante, il suffit de calculer, par exemple, l'image de 0 par h . On a : $h(0) = f(0) \times f(-0) = f(0)^2$.

La condition $f(0) = 1$ donne alors $h(0) = 1$. Donc, pour tout réel x , on a $h(x) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x , on a $f(x) \times f(-x) = 1$.

S'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde.

Donc, pour tout réel x , $f(x)$ est différent de 0.

Cela est équivalent à dire que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. a. Comme le dénominateur de la fonction k ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le nombre $k(x)$ est bien défini pour tout x . En appliquant la propriété de dérivée d'un quotient, on obtient, pour tout réel x :

$$k'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{[f(x)]^2} = 0. \text{ Donc } k \text{ est constante sur } \mathbb{R}.$$

b. On calcule : $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$. Donc, pour tout réel x , on a $k(x) = 1$ et par suite : $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$,

ce qui est équivalent à $g(x) = f(x)$. Donc : $f = g$.

On a montré que, s'il existe une fonction vérifiant les mêmes conditions que f , alors elle est égale à f , ce qui démontre l'unicité de f .

D2 – Relation fonctionnelle

Soit a un nombre réel quelconque et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie quel que soit le réel a et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$, puis $f(0)$. En déduire que f est la fonction exponentielle.
3. En déduire la relation fonctionnelle de l'exponentielle.

CORRIGÉ

1. Quel que soit le réel a choisi, d'après l'une des étapes de la démonstration de l'unicité, $\exp(a)$ est différent de 0. Donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times \exp(x+a)$ et $x \mapsto \exp(x+a)$ est dérivable d'après la propriété de dérivée de la composée d'une fonction affine avec la fonction $\exp$.

2. Pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times 1 \times \exp(x+a) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = f(x)$.

De plus : $f(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$.

La fonction f vérifie donc les deux conditions $f = f'$ et $f(0) = 1$.

D'après le théorème d'unicité, on en déduit que f est la fonction exponentielle.

3. Puisque le réel a est quelconque, l'égalité $\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x)$, vraie pour tout réel x , est vraie quel que soit le réel a , que l'on peut noter y .

Pour tous réels x et y , on obtient $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$, ce qui équivaut à $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

D3 – Signe et monotonie de la fonction exponentielle

1. a. Montrer que pour tout réel x , on a : $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2$.
 b. En déduire que pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 0$.
 c. Soit x un réel quelconque. Quelle est la valeur de $\exp(x) \times \exp(-x)$?
 En déduire que pour tout réel x , on a : $\exp(x) > 0$.
2. Montrer que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

1.a. Pour tout réel x , on a : $\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp(x)$.

b. Soit x un réel quelconque.

D'après la question précédente, $\exp(x)$ est le carré d'un nombre réel. D'où : $\exp(x) \geq 0$.

c. Pour tout réel x , on a : $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$.

Donc pour tout réel x , $\exp(x)$ est différent de 0. On conclut que, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

2. La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Donc la dérivée de $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des variations d'une fonction dérivable sur un intervalle, la fonction $\exp$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 1 : Propriété algébrique de la fonction exponentielle

1. Soit x un réel quelconque. La démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle a permis de démontrer que :

$$\exp(-x) \times \exp(x) = 1.$$

En déduire successivement que :

a. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;

b. pour tout réel y , on a : $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

2. Soit x un réel quelconque.

a. Vérifier l'égalité : $\exp(0 \times x) = (\exp(x))^0$.

b. Dans cette question, n désigne un entier naturel. Montrer que la suite de terme général $\exp(n \times x)$ est une suite géométrique.

En déduire que : $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

c. Dans cette question, n désigne un entier négatif.

En utilisant $\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)}$ et le fait que $-n$ est un entier naturel, montrer que :

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

d. Conclure pour tout entier n .

Démonstration 2 : Egalités et inégalités

Soit x et y deux réels.

1. a. Justifier l'équivalence : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.

Pour l'implication $e^x = e^y \Rightarrow x = y$, on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

b. En déduire que :

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad e^x = e \Leftrightarrow x = 1.$$

2. a. Justifier l'équivalence :

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y.$$

b. En déduire que :

$$e^x < e \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{et} \quad e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Démonstration 3 : Monotonie de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle

Rappel : Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et m et p deux réels.

Alors $x \mapsto g(mx+p)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto m \times g'(mx+p)$.

Soit m et p deux réels.

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(mx+p)$.

2. Déterminer, selon le signe de m , les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. En complément, montrer que h est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si m est différent de 0.

Activité 1 : Introduire la fonction exponentielle

On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. En s'appuyant sur le fait qu'au voisinage d'un point, une courbe et sa tangente en ce point sont très proches, on va construire une « approximation » par des segments de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

1. Soit A_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 et T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point A_0 .
 - a. Donner les coordonnées de A_0 .
 - b. Justifier que le coefficient directeur de T_0 est égal à 1.
 - c. Placer A_0 dans un repère et tracer la tangente T_0 .
 - d. On nomme A_1 le point de T_0 d'abscisse 0,5. Calculer l'ordonnée de A_1 .
2. La tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 étant très proche de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$, on la remplace par le segment $[A_0A_1]$.
 - a. Justifier que si le point A_1 était sur $\mathcal{C}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A_1 serait 1,5.
 - b. Tracer la droite T_1 passant par A_1 et de coefficient directeur 1,5.
 - c. On nomme A_2 le point de T_1 d'abscisse 1. Montrer que les coordonnées de A_2 sont $(1 ; 2,25)$.
3. Sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$ on remplace $\mathcal{C}$ par le segment $[A_1A_2]$.
 - a. Si le point A_2 était sur $\mathcal{C}$ quel serait le coefficient directeur c_2 de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point ?
 - b. Tracer la droite T_2 passant par A_2 et de coefficient directeur c_2 .
 - c. On nomme A_3 le point de T_2 d'abscisse 1,5. Calculer les coordonnées de A_3 .
4. a. Soit c_3 l'ordonnée du point A_3 . Tracer la droite T_3 passant par A_3 et de coefficient directeur c_3 .
 b. On nomme A_4 le point de T_3 d'abscisse 2. Vérifier que l'ordonnée du point A_4 est égale à 5,0625.
 c. Construire le segment $[A_3A_4]$.

La ligne brisée constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$ est une approximation d'une partie de la courbe d'une nouvelle fonction qui s'appelle la fonction exponentielle.

Activité 2 : Démontrer une propriété qui sera utilisée pour définir la fonction exponentielle

On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Calculer $g(0)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 0$, pour tout réel x .
3. Que peut-on en déduire concernant la fonction g ?
4. Donner l'expression de $g(x)$ pour tout réel x en utilisant les résultats des questions précédentes.
5. En utilisant la définition de la fonction g , montrer que pour tout réel x , on a $f(x) \neq 0$.

Objectif 6. 1

Exercice 6. 1 (45 p 176) *propriétés algébriques*

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression de la variable x .

a. $e^{5x+2} \times e^{x-5}$ b. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{x+2}}$ c. $(e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3$

2. Démontrer que pour tout réel x : $\frac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$.

Exercice 6. 2 (48 – 50 p 176) *propriétés algébriques*

Écrire A, B et C sous la forme e^E où E est une expression et x un réel.

a. $A = (e^{1+x})^2 \times e^{-x}$, $B = e \times e^{5-0,1x}$ et $C = (e^{x+1})^3 \times e^{0,3x}$

b. $A = \frac{1}{e^{-7+0,2x}}$, $B = \frac{e^{2x-5}}{e^{x+5}}$ et $C = \frac{e^{-x+1}}{e^{x-3}}$

c. $A = \frac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$, $B = \frac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$ et $C = \frac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$

Exercice 6. 3 (51 – 54 p 176) *propriétés algébriques*

a. Pour tout réel x , $3e^{2x} - 8e^x - 3 = (1 + 3e^x)(e^x - 3)$.

b. Pour tout réel x , $\frac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x}$.

c. Pour tout réel x , $\frac{e^{x+1}}{e+e^{x+1}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

d. Pour tout réel x , $1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 6. 4 (57 p 176) *propriétés algébriques*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

À tout réel a non nul, on associe les points M_a et N_a de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $-a$.

Démontrer que les segments $[M_a N_a]$ ont un point commun.

Exercice 6. 5 (68 p 176) *équations*

a. $e^{x^2} = e^x$ b. $e^{-2x} - 1 = 0$

Exercice 6. 6 (69 p 176) *équations*

a. $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$ b. $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice 6. 7 (70 p 176) *équations*

a. $3e^{3x-42} + 1 = 4$ b. $e^{5x} = \frac{e^{-x}}{e}$

Exercice 6. 8 (73 p 176) *équations*

1. Démontrer que l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

Exercice 6. 9 (58 – 65 p 176)

1. $A(x) = 0,5 + e^x$, $B(x) = 1 + 0,5e^x$ et $C(x) = -10e^x$

2. $A(x) = -1 - e^x$, $B(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ et $C(x) = e^x(2 + e^x)$

3. $A(x) = -2e^{-x-1}$, $B(x) = 0,3e^{1-0,7x}$ et $C(x) = 1 + 5e^{-1,7x}$

4. $A(x) = 5e^x - xe^x$ et $B(x) = x^2e^x - xe^x$

5. $A(x) = e^x - 2xe^x$ et $B(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$

6. $A(x) = 4e^{-x} - x^2e^{-x}$ et $B(x) = xe^x - e^{x+2}$

7. $A(x) = x^2e^x - e^{x+2}$ et $B(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^x + 1}$

8. $A(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et $B(x) = xe^x - e^{x+1}$

Exercice 6. 10 (74 p 177) *inéquations*

a. $1 \leq e^{3x}$ b. $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leq 0$

Exercice 6. 11 (75 p 177) *inéquations*

a. $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ b. $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

Exercice 6. 12 (76 p 177) *inéquations*

1. Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$.

3. En déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 13 (79 p 177) *inéquations*

1. Factoriser le polynôme du second degré :

$$-5X^2 + 3X + 2.$$

2. En déduire une factorisation de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$.

3. Étudier le signe de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 14 (87 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5 - x)e^x.$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de f .

Exercice 6. 15 (89 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3).$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de f .

Exercice 6. 16 (91 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x - 1)^2$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, puis sur $[0; +\infty[$.

Exercice 6. 17 (93 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $[2; 10]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.

2. En déduire le tableau de variation de f sur $[2; 10]$.

Exercice 6. 18 (94 p 179) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$.

2. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 6. 19 (101 p 179) *étude de fonction*

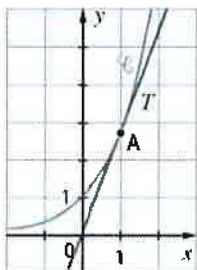
1. À l'aide d'une calculatrice, faire une conjec-

ture sur le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle et de la droite d'équation $y = x + 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
 - a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
 - b. Construire le tableau de variation de la fonction f .
 3. Démontrer la conjecture faite dans la question 1.

Exercice 6. 20 (103 p 179) étude de fonction

On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.



1. Faire une conjecture sur la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
2. Démontrer qu'une équation de T est : $y = ex$.

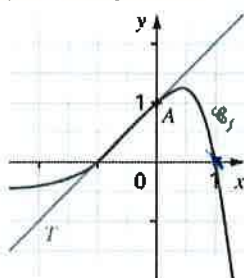
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - ex.$$

- a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c. Construire le tableau de variation de la fonction f .
4. Démontrer la conjecture faite dans la question 1.

Exercice 6. 21 (Déclic 121 p 199) étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ où a , b et c sont trois réels. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



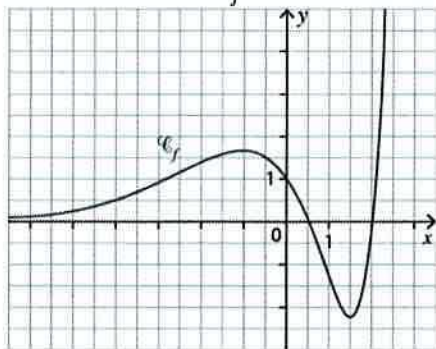
1. a. Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.
- b. En déduire la valeur de c .
2. a. Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.
- b. Calculer $f'(x)$ en fonction de a , b et c .
- c. En déduire la valeur de b .
3. Lire graphiquement $f(1)$. En déduire la valeur de a .
4. Étudier les variations de f .

Exercice 6. 22 (Barbazo 47 p 197) étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2,5x + 1)e^x.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f .

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M .

Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M (expliquer la démarche).

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0.

4. Compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près, l'abscisse du point P intersection de la tangente $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}_f$.

```
1 from math import exp
2 def intersect():
3     x=0
4     y=1
5     z=1
6     while y>=z:
7         x=...
8         y=-1.5*x+1
9         z=...
10    return ...
```

Exercice 6. 23 suite

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que, $\forall x \geq 0$, $e^x - x > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et u est la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Démontrer que f est croissante sur $[0; 1]$.
- b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
- c. À l'aide de la question précédente démontrer que $u_1 \in [0; 1]$.
- d. Démontrer de même que u_2 et u_3 appartiennent à $[0; 1]$.

Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout entier n , $u_n \in [0; 1]$.

2. a. Montrer que, $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. a. Conjecturer la limite ℓ de la suite (u_n) .

b. Proposer une fonction, écrite en Python, qui retourne l'indice du premier le premier terme de la suite (u_n) qui dépasse $\ell - 0,001$.

Objectif 6. 2

Exercice 6. 24 (95 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20xe^{-0,1x+3}$.

Exercice 6. 25 (96 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-x+1}$.

Exercice 6. 26 (97 p 178) *dérivée*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

Exercice 6. 27 (98 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + 2x)e^{3x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 6. 28 (99 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Justifier le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{e}{e^2 + 1}$	0,5	$\frac{e}{e^2 + 1}$

Exercice 6. 29 (102 p 178) *étude de fonction*

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 2 + e^{-2x+1}$.

Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 30 (82 p 177) *étude de fonction*

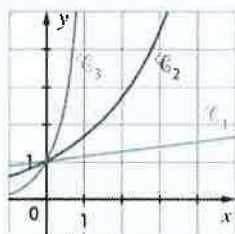
1. Soit k et m deux réels tels que $0 < k < m$. Étudier le signe de $e^{kx} - e^{mx}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{0,5x}, g(x) = e^{0,1x} \text{ et } h(x) = e^{2x}.$$

On a représenté ci-contre ces trois fonctions.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

**Exercice 6. 31** (86 p 178) *étude de fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0,5e^{0,173x} \text{ et } \mathcal{C}_f \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f .
2. Montrer que pour tous réels x et T , $f(x + T) = e^{0,173T}f(x)$.
3. On souhaite déterminer le nombre réel T tel que pour tout réel x , $f(x + T) = 2f(x)$.
 - a. Justifier que $f(T) = 2f(0)$.
 - b. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction `T_exp` retourne une valeur approchée à 0,01 près du réel T .

```
1 from math import*
2 def T_exp():
3     T=0
4     y=0.5
5     while ...:
6         T=T+0.01
7         y=0.5*exp(0.173*T)
8     return (...)
```

c. Quelle valeur est affichée par le programme ?

d. En utilisant ce résultat, construire la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 16]$.

Exercice 6. 32 (sujet A p 187) *étude de fonction*

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 2e^x - 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^x - 2x - 2$.

a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier son signe.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout réel x , $2e^x - 1 \geq 2x + 1$.

d. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

a. Pour tout réel x , développer l'expression $(e^x - 1)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

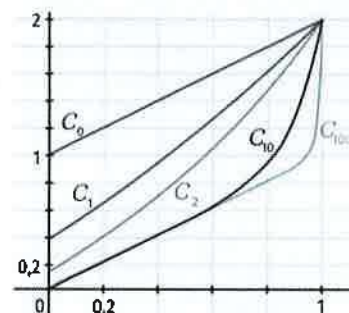
Exercice 6. 33 (Lelivrescolaire 94 p 176) *étude de fonction*

Pour tout entier naturel n , on définit la

fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$.

On note C_n la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante sur $[0; 1]$.



3. Montrer, par le calcul, que toutes les courbes C_n ont un point commun A dont on précisera les coordonnées.

Exercice 6. 34 (136 p 198) *étude de fonction*

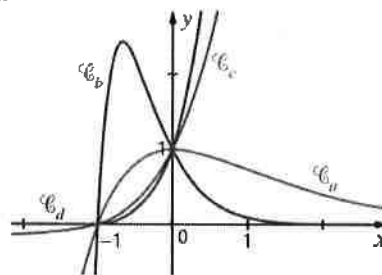
Pour tout entier k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k .

- Vérifier que, pour tout entier k , les points $A(-1; 0)$ et $B(0; 1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
- a. Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.
b. En déduire, pour k un entier donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
- a. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k non nulles. On distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$.
- Le graphique ci-dessous représente quatre courbes correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers $-1, -3, 1$ et 2 .

Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Objectif 6. 3

Exercice 6. 35 (104 p 179) suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{n+1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

Exercice 6. 36 (106 p 179) suite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-0,8x}$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

Exercice 6. 37 (107, 108 p 179) suite

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}$;
- $f(x) = 100e^{-x+2}$.

Exercice 6. 38 (Barbazo 49 p 198) suite

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. La vitesse de la goutte durant sa chute peut être modélisée par la suite (v_n) avec :

$$v_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}n}\right),$$

où :

- n désigne le temps écoulé en seconde depuis que la goutte a quitté le nuage ;
- m désigne la masse de la goutte en mg ;
- k est la constante de frottement de l'air.

On donne $k = 3,9$ et $m = 6$ mg.

- Déterminer la vitesse de la goutte 10 s après sa chute.
- On note (T_n) la suite donnant la variation de la vitesse chaque seconde :

$$T_n = v_{n+1} - v_n.$$

Montrer que (T_n) est une suite géométrique décroissante, puis déterminer à la calculatrice au bout de combien de temps cette variation est négligeable (inférieure à $0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Exercice 6. 39 (Déclic B5 p 207)

Un condensateur de capacité $C = 0,002$ farad, initialement chargé à une tension $E = 10$ volts, se décharge, à partir de l'instant $t = 0$, à travers un circuit de résistance $R = 20\,000$ ohms.

On note u la tension du condensateur en fonction du

temps t exprimé en seconde.

On admet que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$u(t) = E \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Donner une expression de u .
- a. Quelle est la tension au bout de 10 secondes ?
b. Au bout de combien de temps le condensateur sera-t-il à moitié déchargé ?
- a. Étudier le sens de variations de la fonction u .
b. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 6. 40 (110 p 178)

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché un nouveau jouet. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 18]$ par $f(x) = 5xe^{-0,2x}$.

où x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire et $f(x)$ le nombre de milliers de jouets vendus le x -ième jour.

- Démontrer que $f'(x) = (5 - x)e^{-0,2x}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 18]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 18]$.
- Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

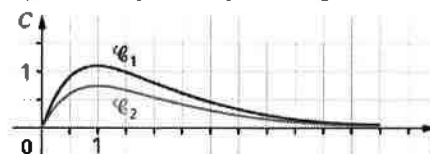


Exercice 6. 41 (Déclic B4 p 207)

Partie A. Étude graphique

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent, pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes, la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre (g/L) et t en heure.



- La fonction C est définie sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$, $C'(t)$ est la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang. À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
- On dit souvent qu'une personne de faible corpulence

subit plus vite les effets de l'alcool.

Identifier sur le graphique la courbe correspondant à la personne la plus corpulente.

Partie B. Un cas particulier

On suppose ici que le taux d'alcool d'une personne, en fonction du temps en heure, est modélisé par $C(t) = 2t \times e^{-t}$ pour $t \in [0; 12]$.

1. Construire le tableau de variations de C sur $[0; 12]$.

2. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

3. Pour les jeunes conducteurs, le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux est supérieur ou égal à 0,2 g/L.

En supposant que la personne est un jeune conducteur, déterminer au bout de combien de temps après avoir consommé de l'alcool le taux d'alcoolémie reprend une valeur conforme à la législation ?

Exercice 6. 42 (112 p 180)

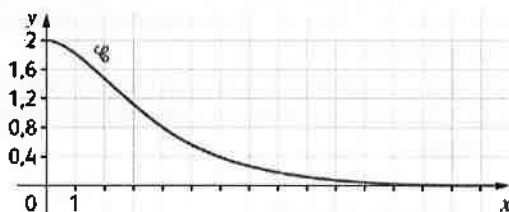
On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t (exprimé en heures). On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, associe $y(t)$ est définie par $y(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Étudier les variations de la fonction y sur $[0; +\infty[$.

2. En déduire au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique est maximale.

Exercice 6. 43 (Déclic 118 p 199)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre (g/L). On obtient la courbe suivante.



1. Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

a. la concentration à l'instant initial ;
b. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L.

2. On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = (t + 2) \times e^{-0,5t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(t)$ est la concentration du médicament dans le sang (en g/L).

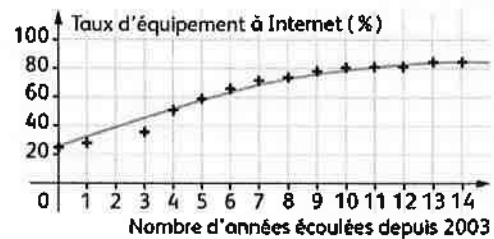
a. Justifier que pour tout réel $t \in [0; 15]$, on a :

$$f'(t) = -0,5t \times e^{-0,5t}$$

b. En déduire le tableau de variations complet de f .
c. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est strictement inférieure à 0,1 g/L. À l'aide de la calculatrice, déterminer pendant combien de temps le médicament est actif, à 0,1 h près.

Exercice 6. 44 (Déclic 122 p 199)

On modélise le taux d'équipement des ménages français à l'Internet pour l'année $(2003 + x)$ par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{90}{1 + 1,8e^{-0,27x}}$



Source : INSEE

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{43,74e^{-0,27x}}{(1 + 1,8e^{-0,27x})^2}$$

2. Construire le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. Selon le modèle, peut-on considérer que 95 % des ménages français disposeront un jour d'Internet à la maison ?

Exercice 6. 45 (CQFD 80 p 191)

On étudie la croissance du diamètre (en millimètre) d'une certaine plante en fonction de la durée t (en jour).

On propose de confronter deux modèles de croissance aux observations expérimentales.

L'égalité $t = 0$ correspond au début de l'expérience.

A. Modèle de Von Bertalanffy (1901-1972)

La croissance est modélisée par :

$$D_1(t) = 15 - 20e^{-0,5t}$$

1. Étudier les variations de D_1 sur $[0; 10]$.

2. Montrer que pour tout réel t , on a :

$$D_1(t) = 15 - 2D_1'(t)$$

B. Modèle de Verhulst (1804-1849)

La croissance est modélisée par :

$$D_2(t) = \frac{15}{1 + 20e^{-0,5t}}$$

1. Étudier les variations de D_2 sur $[0; 10]$.

2. Montrer que pour tout réel t , on a :

$$D_2'(t) = \frac{1}{30} D_2(t) (15 - D_2(t))$$

C. Confrontation des modèles aux valeurs expérimentales

1. Tracer l'allure des courbes représentatives de D_1 et D_2 sur $[0; 10]$.

On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

2. Les relevés expérimentaux du diamètre D , en mm, en fonction de la durée t (en jour), sont donnés ci-dessous.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1,5	2	2,5	4	6	7,5	9,5	11	12	13

Quel modèle semble le plus adapté à ces données ?

Exercice 6. 46 (Lelivrescolaire 99 p 178)

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail.

La production minimale est de 10 tonnes. On s'intéresse

au bénéfice réalisé, en milliers d'euros, correspondant à la production d'une quantité de q dizaines de tonnes d'aliments.

On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la

fonction B donnée par $B(q) = 10 - \frac{e^{0,2q+1}}{q}$.

1. Sur quel intervalle I est définie B ?

2. a. Démontrer que, pour tout réel $q \in I$:

$$B'(q) = \frac{(1 - 0,2q)e^{0,2q+1}}{q^2}.$$

b. Étudier le signe de $B'(q)$ sur I .

c. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur I .

3. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ? Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?

Exercice 6. 47 (CQFD 74 p 191)

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = 0,4x + 1 + e^{-0,4x+1}.$$

1. Montrer que, pour tout x dans $[0 ; 30]$, on a :

$$f'(x) = 0,4(1 - e^{-0,4x+1}).$$

2. Résoudre dans $[0 ; 30]$ l'inéquation $1 - e^{-0,4x+1} > 0$.

3. En déduire les variations de f sur $[0 ; 30]$.

On donnera l'arrondi à 10^{-2} de $f(0)$ et de $f(30)$.

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à l'effigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0 \leq x \leq 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine d'euros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A..

1. Calculer le coût de fabrication de 100 paquets, puis de 2 000 paquets, à l'euro près.

2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.

a. Soit x dans $[0 ; 30]$.

Montrer que la différence $B(x)$ entre le chiffre d'affaires et le coût de fabrication est de la forme : $mx + p - e^{-0,4x+1}$, où m et p sont des réels à préciser.

b. Déterminer les variations de la fonction B ainsi définie sur $[0 ; 30]$.

c. À l'aide de la calculatrice, indiquer à partir de combien de paquets l'entreprise réalise un bénéfice, au paquet près.

7 Fonctions trigonométriques

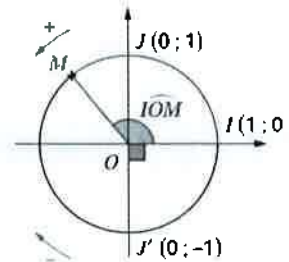
1 Mesurer un angle en radian

On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

Définition 7.1

cercle trigonométrique

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (ie : sens inverse des aiguilles d'une montre) est appelé cercle trigonométrique.



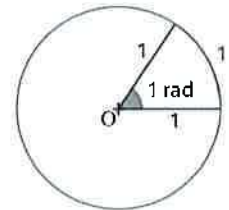
Remarque : - Le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$.

- Si M est un point de $\mathcal{C}$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{IOM}$ en degré qui intercepte cet arc. Cette proportionnalité permet de donner la définition suivante.

Définition 7.2

radian

Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.



Conséquence : $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$; $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

Compléter le tableau suivant :

Exemple 7.1

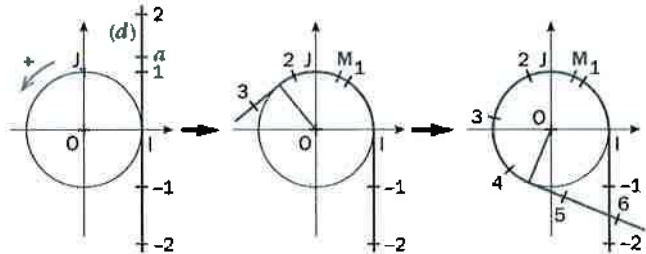
Radian	2π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\frac{2\pi}{9}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi/6$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\pi/4$	$\frac{\pi}{5}$	$\pi/4$
Degré	360	90	60	40	180	150	30	180	240	45	36	135

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Soit (d) la tangente à $\mathcal{C}$ au point I . On définit sur cette droite un repère d'origine I comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Propriété 7.1

A tout nombre réel α on associe, par enroulement de (d) sur $\mathcal{C}$, un unique point M de $\mathcal{C}$ appelé image de α sur $\mathcal{C}$.



Exemple 7.2

- Placer sur le cercle trigonométrique les points associés à 0 ; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π ; $-\pi$; $\frac{3\pi}{2}$.
- Placer sur le cercle trigonométrique les points $A(\frac{\pi}{3})$; $B(\frac{\pi}{6})$; $C(\frac{\pi}{4})$; $D(-\frac{2\pi}{3})$; $E(\frac{7\pi}{3})$; $F(-\frac{17\pi}{3})$.

Remarque : - Avec les notations précédentes α est une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$, orienté de I vers M , noté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

- Le dernier exemple montre que des réels différents peuvent avoir la même image sur $\mathcal{C}$. La propriété suivante permet de caractériser ces réels.

Propriété 7.2

Deux réels x et x' ont le même point image sur $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe un entier k tel que $x = x' + 2k\pi$. Dans ce cas on pourra écrire $x = x' (2\pi)$ pour signifier que x et x' sont égaux à un certain nombre entier de 2π près (ie « tours de cercle » près).

Remarque : - $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ ont pour image J sur $\mathcal{C}$ donc on peut écrire $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} (2\pi)$ mais ça ne veut pas dire que $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$. En effet, $\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi \neq -\frac{3\pi}{2}$. Les deux nombres sont égaux à 2π près, c'est à dire à « un tour de cercle près ».

- Tout point M de $\mathcal{C}$ est associé à un nombre réel x (par exemple la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ parcouru dans le sens direct). Alors, d'après la propriété précédente, tout point M de $\mathcal{C}$, associé à un nombre réel x , est également associé à une infinité de réel de la forme $x + 2k\pi$, k dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, si x est une mesure, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$, quelque soit k dans $\mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est aussi une mesure en radian de $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$. Par abus de notation on identifie angle et mesures de cet angle en écrivant $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = x (2\pi)$.

- Parmi les mesures de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ on peut démontrer qu'une seule appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

Exemple 7.3 | Déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est : $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{185\pi}{6}$; $-\frac{127\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{4}$; $\frac{2011\pi}{8}$.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

Définition 7.3

$\cos x; \sin x$

Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ associé à x .

- L'abscisse de M est appelée cosinus de x , noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée de M est appelée sinus de x , noté $\sin(x)$.

Exemple 7.4

1. Déterminer les coordonnées du point image de $\frac{\pi}{2}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer $\cos \pi$ et $\sin \pi$.

Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle

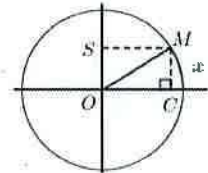
La définition précédente prolonge celle donnée dans le triangle rectangle pour le cosinus et le sinus d'un angle aigu.

En effet, lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$, les coordonnées de M sont toutes deux positives donc $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$. Par suite, la définition précédente permet d'écrire : $\cos x = OC$ et $\sin x = OS = CM$.

D'autre part les égalités du collège permettent d'écrire :

$$\cos \widehat{COM} = \frac{OC}{OM} = \frac{OC}{1} = OC \text{ et } \sin \widehat{COM} = \frac{CM}{OM} = \frac{CM}{1} = CM.$$

Finalement, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ et $\sin x$ sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{COM}$.

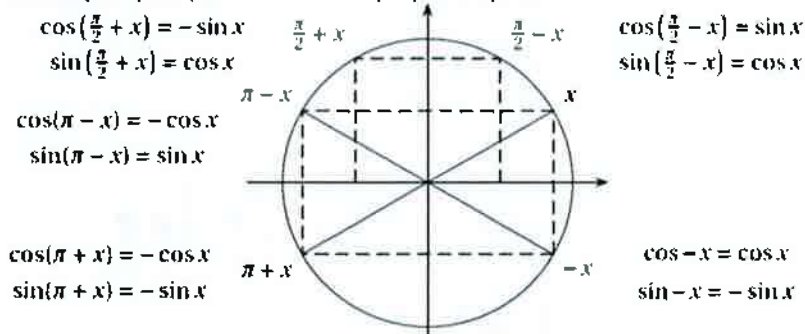


Propriété 7.3

Pour tout réel x on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Remarque : par symétries d'autres propriétés peuvent être démontrées.



Exemple 7.5

1. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos x = 0,6$. Déterminer la valeur de $\sin x$.
2. a. Même question avec $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.
b. En déduire $\sin(-x)$, $\sin(x + 6\pi)$ et $\sin(x - 3\pi)$.

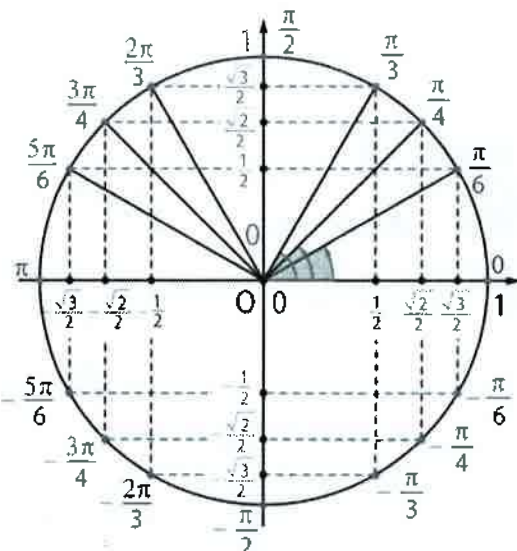
Valeurs remarquables

Les valeurs de ce tableau (cf D1) permettent de compléter le premier quadrant de la figure ci-contre. Les autres s'obtiennent par des propriétés de symétries vues dans la propriété 7.3.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exemple 7.6

Déterminer la valeur exacte de :
 $\cos \frac{2\pi}{3} + \sin(-\frac{5\pi}{6}) + \sin \frac{11\pi}{4}$.



3 Fonctions cosinus et sinus

Définition 7.4

fonction cosinus, fonction sinus

La fonction cosinus est la fonction qui, à tout nombre réel x , associe $\cos(x)$.

La fonction sinus est la fonction qui, à tout nombre réel x , associe $\sin(x)$.

Propriété 7.4

parité, périodicité

La fonction cosinus est paire (ie : domaine de définition $\mathcal{D}$ centré en 0 et $\forall x \in \mathcal{D}, \cos(-x) = \cos(x)$)

La fonction sinus est impaire (ie : domaine de définition $\mathcal{D}$ centré en 0 et $\forall x \in \mathcal{D}, \sin(-x) = -\sin(x)$)

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ie : $\forall x \in \mathcal{D}, (x + 2\pi) \in \mathcal{D}$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$)

Interprétation graphique

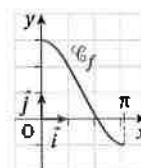
La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et invariante par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{OI}, k$ dans $\mathbb{Z}$.

La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et invariante par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{OI}, k$ dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 7.7

La courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2\cos x$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $[0; \pi]$ dans un repère orthonormé.

1. Etudier la parité de f puis compléter le tracer de C_f sur $[-\pi; 0]$.
2. Etudier la périodicité de f puis compléter le tracer de C_f sur $[\pi; 3\pi]$.



Etude et courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus

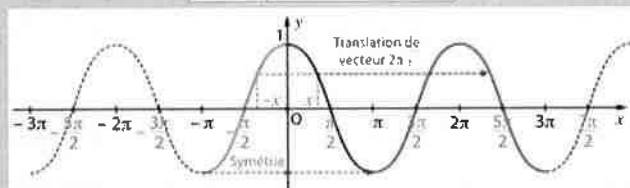
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques donc on peut restreindre leur étude à un intervalle de longueur 2π et compléter sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{OI}, k$ dans $\mathbb{Z}$. Pour utiliser la parité prenons un intervalle centré en 0 : $[-\pi; \pi]$.

La fonction cosinus (resp sinus) est paire (resp impaire) donc l'étude sur $[-\pi; \pi]$ peut être restreinte à $[0; \pi]$ puis complétée sur $[-\pi; 0]$ par symétrie d'axe (Oy) (resp de centre O).

Propriété 7.5

Fonction cosinus

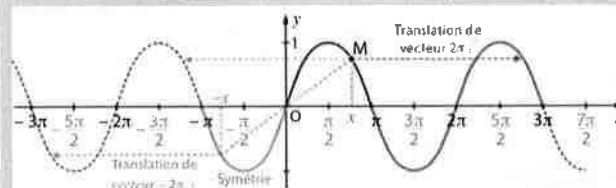
x	0	π
$\cos(x)$	1	-1



variations des fonction cosinus et sinus

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0



Remarque : les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées sinusoides.

Exemple 7.8

Démontrer que la fonction f définie dans l'exemple précédent est décroissante sur $[0; \pi]$.

En utilisant la parité et la périodicité de f dresser le tableau de variations de la fonction sur $[-3\pi; \pi]$.

D1 – Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

1. En considérant les points I et J du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, déterminer le cosinus et le sinus de 0 et de $\frac{\pi}{2}$.
2. Dans le premier quadrant du repère, l'arc de cercle de centre J et de rayon 1 coupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.
 - a. Justifier que $(\overline{OI}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 - b. On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Démontrer que $OK = \frac{1}{2}$ et $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
3. a. Décrire une construction géométrique du point N du cercle trigonométrique défini par $(\overline{OI}, \overline{ON}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
 - b. Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

CORRIGÉ

1. I(1; 0) correspond à une mesure d'angle nulle, donc on a, par définition, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

De même, J(0; 1) correspond à un angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2. a. Par construction, on a $OJ = OM = JM = 1$. Le triangle OMJ est donc équilatéral.

Donc $\widehat{MOJ} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

Finalement, $\widehat{IOM} = \widehat{IOJ} - \widehat{MOJ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ rad. Donc $(\overline{OI}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

b. (MK) est un axe de symétrie du triangle équilatéral OMJ. Donc $OK = 0,5 OJ = 0,5$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OMK rectangle en K,

on a $OM^2 = OK^2 + KM^2$. Donc $KM^2 = OM^2 - OK^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $KM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Les coordonnées M sont $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

3. a. Dans le premier quadrant du repère, on trace un arc de cercle de centre I et de rayon 1.

Il coupe le cercle trigonométrique en N.

Le triangle OIN ainsi construit étant équilatéral, on a $(\overline{OI}, \overline{ON}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b. Dans la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, le point O est invariant, et les points I et J sont symétriques. Donc les arcs de cercle construits dans les questions 2. et 3. a. sont aussi symétriques, ainsi que M et N. Donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_N = y_M = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_N = x_M = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Soit P l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et du cercle trigonométrique dans le premier quadrant.

Les angles $\widehat{IOP}$ et $\widehat{POJ}$ étant symétriques par rapport à cette droite, ils ont la même mesure.

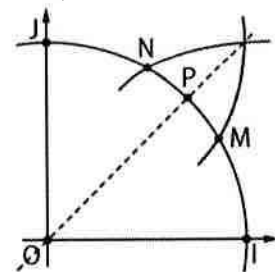
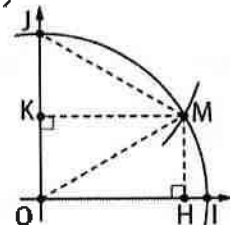
Comme, de plus, leur somme vaut $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit : $(\overline{OI}, \overline{OP}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Le point P appartient au cercle trigonométrique, donc : $x_p^2 + y_p^2 = 1$.

Comme, de plus, P appartient à la droite d'équation $y = x$, on a : $y_p = x_p$.

On en déduit donc que $x_p^2 + y_p^2 = 1$, d'où $2x_p^2 = 1$, d'où $x_p^2 = \frac{1}{2}$.

Or : $x_p > 0$; donc : $x_p = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = x_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_p = x_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Démonstration 1 : Conversion degré/radian

On se place dans la situation du cours, où l'abscisse x du point N sur l'axe $(I; T)$ est positive.

1. Justifier brièvement qu'un angle de 0° correspond à 0 rad.
2. On enroule le demi-axe $[I; T)$ d'un tour complet sur le cercle $\mathcal{C}$ (dans le sens positif).
 - a. Calculer le périmètre du cercle $\mathcal{C}$.
 - b. Donner l'angle en degré et en radian réalisé pour cet enroulement.
3. Remarquons que, pour x dans $[0; 2\pi[$, l'abscisse x de N est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.

On admet que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est proportionnelle à la mesure en degré de l'angle au centre $\widehat{IOM}$.

- a. Déterminer le coefficient de proportionnalité permettant la conversion de degré en radian, et réciproquement, celui permettant la conversion de radian en degré.
- b. Justifier alors l'ensemble des valeurs du tableau du cours.

Démonstration 2 : Unicité de la mesure principale

On considère un point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. On admet qu'il existe une valeur θ' de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui est une mesure en radian associée au point M , et on souhaite démontrer que cette valeur est unique.

On suppose que θ'_1 et θ'_2 sont deux mesures en radian appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ associées au point M : il existe donc un entier relatif k tel que $\theta'_2 = \theta'_1 + 2k\pi$.

1. À quel intervalle appartient $\theta'_1 - \theta'_2$?
2. En déduire la valeur de k et conclure.

Démonstration 3 : Relation fondamentale de la trigonométrie et propriété d'encadrement

1. Démontrer qu'un point $M(x_M; y_M)$ est sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x_M^2 + y_M^2 = 1$.

2. On considère un point M sur le cercle trigonométrique, associé à une mesure x en radian.

Justifier que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, puis en déduire que : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Démonstration 4 : Translation horizontale d'une courbe

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels $\mathcal{D}$ et k un réel.

On considère la fonction g définie pour tout x tel que $x+k \in \mathcal{D}$ par $g(x) = f(x+k)$. On appelle F et G les points appartenant aux courbes représentatives des fonctions f et g respectivement, et d'abscisses respectives $x+k$ et x .

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}$ et vérifier qu'elles ne dépendent que de k .
2. Quelle transformation du plan permet d'obtenir la représentation graphique de g à partir de celle de f ? Préciser les éléments de cette transformation.

Démonstration 4 : Invariance de la courbe d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels $\mathcal{D}$ et T un réel. On suppose que f est T -périodique.

Soit un réel x de $\mathcal{D}$. On considère le point $M(x; f(x))$ appartenant à la courbe représentative de f .

1. Démontrer que le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = -k\vec{i}$ appartient également à la courbe représentative de f .
2. Quelle est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-k\vec{i}$?

Démonstration 5 : Propriétés fonctionnelles de sinus et de cosinus

On considère un point M du cercle trigonométrique correspondant à une mesure x en radian.

1. Justifier que :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

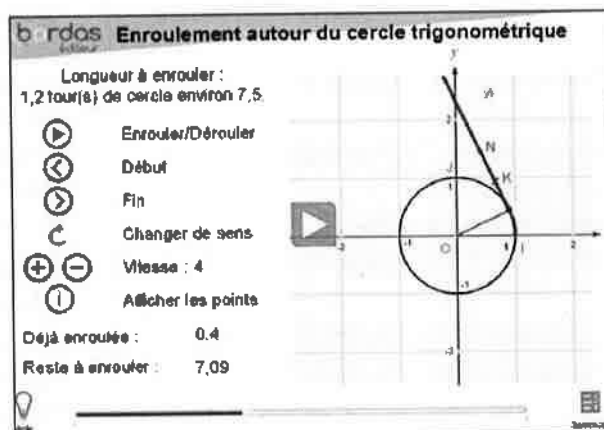
2. On considère le symétrique M_1 du point M par rapport à l'axe des abscisses (OI) .

a. Déterminer, en fonction de x , une mesure en radian associée à M_1 .

b. En raisonnant sur les coordonnées des points M et M_1 du cercle trigonométrique, exprimer $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

Activité 1 : visualiser l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (p 102)

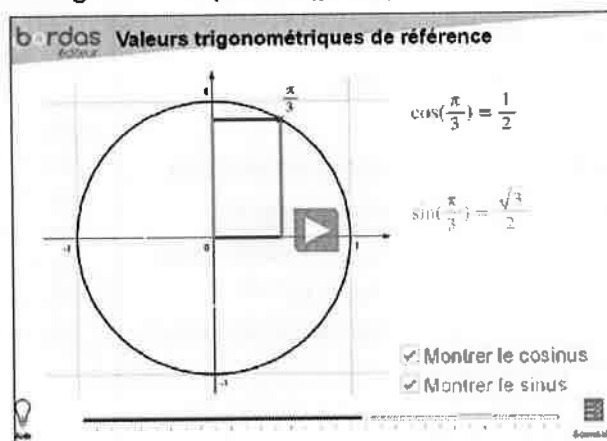
Sur la figure ci-contre se trouvent un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, une droite graduée $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (OI) en I et un point K placé sur la graduation 1 de cette droite. On « enroule » alors la droite $\mathcal{D}$ sur le cercle $\mathcal{C}$. La demi-droite $[IK)$ s'enroule dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, qu'on appelle sens direct ; l'autre demi-droite dans le sens horaire habituel, qu'on appelle sens indirect.



- 1 Quel est le périmètre du cercle $\mathcal{C}$?
En déduire la longueur de l'arc $\widehat{IJ}$ de ce cercle.
- 2 Un point N est placé sur la graduation $\frac{\pi}{2}$ de cette droite. En imaginant l'enroulement de cette droite $\mathcal{D}$ sur le cercle $\mathcal{C}$, sur quel point M du cercle le point N vient-il se placer ? Justifier la réponse, puis la vérifier à l'aide de l'affichage obtenu dans l'animation.
- 3 a. Reprendre la question 2, lorsque le point N est placé sur la graduation $-\frac{\pi}{2}$ de la droite $\mathcal{D}$.
On appelle M' le point obtenu sur le cercle.
b. Quelle symétrie axiale permet de passer du point M au point M' ?
- 4 Donner deux autres nombres réels dont le point image se confond avec le point M du cercle obtenu à la question 2. Trouver un lien entre tous ces nombres.
- 5 Reprendre les questions 2 et 4, lorsque le point N est placé sur la graduation $\frac{3\pi}{4}$ de $\mathcal{D}$.

Activité 2 : découvrir le cosinus et le sinus d'angles remarquables (p 102)

On a représenté une partie du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Le point M est le point image d'un réel α par enroulement de la droite numérique et α est la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{IOM}$.



- 1 Dans cette question, on suppose que le réel α est égal à $\frac{\pi}{3}$.
 - a. Tracer la figure.
 - b. Quelle est la mesure, en degrés, de l'angle α ?
 - c. Quelle est la nature du triangle IOM ?
 - d. Que représente le point H pour le segment $[OI]$? Que vaut alors la longueur OH ?
 - e. En déduire la valeur de $\cos(60^\circ)$.
 - f. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM , déterminer MH . En déduire la valeur de $\sin(60^\circ)$.
- 2 À l'aide de l'animation, visualiser les valeurs des cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Activité 3 : découvrir des propriétés du cosinus et du sinus

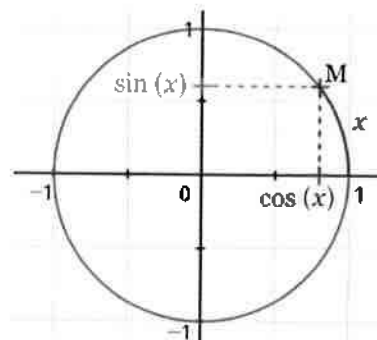
Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$ on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

Pour tout réel x on note M le point associé à x sur $\mathcal{C}$.

L'abscisse de M est le cosinus de x .

L'ordonnée de M est le sinus de x .

Les coordonnées de M sont donc $(\cos x ; \sin x)$.



1. A quel intervalle appartient l'abscisse de M ? Et l'ordonnée ?

2. Quelles sont les coordonnées du point M' , point image du réel $-x$?

On proposera deux écritures différentes.

3. En partant du point M associé à x on effectue un tour complet du cercle trigonométrique dans le sens direct.

a. Sur quel point du cercle arrive-t-on ?

b. Justifier que le nombre $x + 2\pi$ est associé à ce point.

c. Comparer alors $\cos x$ et $\cos(x + 2\pi)$ ainsi que $\sin x$ et $\sin(x + 2\pi)$.

4. Soit M'' le point image du réel $x - \pi$.

a. Quelles sont les coordonnées du point M'' ?

b. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de M à M'' ?

b. En déduire l'expression des coordonnées de M'' en fonction de celles de M .

5. Mêmes questions avec le point M''' image du réel $x + \pi$.

1 Mesurer un angle en radian

Exercice 7. 1 (33 p 202)

Compléter le tableau ci-dessous.

Mesure en degrés		75°		120°	
Mesure en radians	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{5\pi}{4}$

Exercice 7. 2 (36 p 202)

1. Donner la mesure en radians de chacun des angles suivants.

- a. 50° b. 100° c. 150° d. 240°

2. Convertir en degrés les mesures suivantes, données en radians.

- a.
- $\frac{4\pi}{5}$
- b.
- $\frac{7\pi}{9}$
- c. 3 d.
- $\frac{23\pi}{18}$

Exercice 7. 3 (20-22 p 202)

Tracer le cercle trigonométrique puis placer les points images réels proposés par enroulement.

1. a. $\frac{\pi}{3}$ b. $-\frac{4\pi}{3}$ c. $\frac{5\pi}{3}$ d. $\frac{10\pi}{3}$
 2. a. $\frac{\pi}{4}$ b. $\frac{8\pi}{4}$ c. $-\frac{7\pi}{4}$ d. $-\frac{9\pi}{4}$
 3. a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{11\pi}{6}$ c. $-\frac{7\pi}{6}$ d. $-\frac{13\pi}{6}$

Exercice 7. 4

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure en radian est :

1. $\frac{23\pi}{4}$; 2. $-\frac{50\pi}{3}$; 3. $\frac{1989\pi}{6}$;
 4. $-\frac{17\pi}{4}$; 5. $\frac{12\pi}{15}$; 6. 31π .

Exercice 7. 5 (Hatier 53 p 202)

a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 cm, puis placer un point M sur $\mathcal{C}$.b. N est un point de $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{MN}$ mesure 20 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MON}$ arrondie au degré, puis placer le point N.c. Placer le point P de $\mathcal{C}$ tel que P est le symétrique de N par rapport à O. En déduire la longueur de l'arc $\widehat{MP}$ arrondie au dixième de cm.

Exercice 7. 6

Écrire un algorithme demandant en entrée une mesure θ d'un angle orienté et permettant de donner la mesureprincipale de cet angle et le réel k tel que $\theta - 2k\pi$ soit la mesure principale de l'angle.

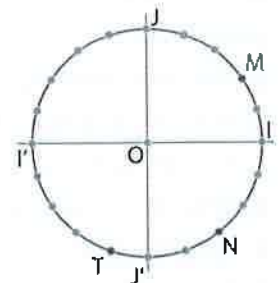
Exercice 7. 7 (24 p 202)

Dans chacun des cas, dire si les points images par enroulement des deux réels proposés sont confondus ou non.

- a. $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ b. $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{32\pi}{8}$
 c. $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{26\pi}{7}$ d. $\frac{17\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$
 e. $\frac{42\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$ f. 1 et $1 - 2\pi$

Exercice 7. 8 (26 - 28 p 202)

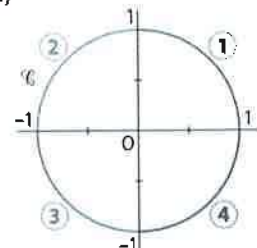
On considère les points M, N et T du cercle trigonométrique partagé en 20 arcs de même mesure ci-contre. Indiquer si l'affirmation proposée est juste ou fausse. Justifier.

1. M est le point image par enroulement des nombres réels de la forme $\frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.2. T est le point image du réel $\frac{27\pi}{5}$.3. N est le point image du réel $-\frac{23\pi}{10}$.

Exercice 7. 9 (29 - 31 p 202)

On considère le cercle trigonométrique ci-contre, partagé en quatre arcs de même mesure.

Pour chaque exercice, dire sur quel arc de cercle se trouvent les points images par enroulement des réels donnés.



1. a. $\frac{7\pi}{4}$ b. $-\frac{5\pi}{8}$ c. $-\frac{19\pi}{10}$ d. $\frac{16\pi}{3}$
 2. a. $-\frac{7\pi}{12}$ b. $\frac{17\pi}{9}$ c. $\frac{17\pi}{7}$ d. $-\frac{25\pi}{4}$
 3. a. 1 b. 3 c. 5 d. 7

Exercice 7. 10 (32 p 202)

Donner tous les réels de l'intervalle $]-4\pi; 4\pi]$ qui ont pour image par enroulement le même point du cercle trigonométrique que le réel $\frac{5\pi}{6}$.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Exercice 7. 11 (45 p 203)

Parmi les cinq réels suivants, quatre ont le même cosinus.

Quel est l'intrus ?

- $\frac{\pi}{5}$ $\frac{9\pi}{5}$ $\frac{21\pi}{5}$ $\frac{11\pi}{5}$ $\frac{14\pi}{5}$

Exercice 7. 12 (46 p 203)

Parmi les cinq réels suivants, quatre ont le même sinus.

Quel est l'intrus ?

- $\frac{\pi}{7}$ $-\frac{8\pi}{7}$ $\frac{20\pi}{7}$ $\frac{13\pi}{7}$ $-\frac{13\pi}{7}$

Exercice 7. 13 (Déclic 64 p 225)

1. Déterminer le signe des nombres suivants.

- a. $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$ b. $\cos \frac{5\pi}{8}$ et $\sin \frac{5\pi}{8}$
 c. $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$ d. $\cos \frac{-\pi}{7}$ et $\sin \frac{-\pi}{7}$

2. Vérifier à la calculatrice réglée en mode radian.

Exercice 7. 14 (71 p 205)1. Convertir $\frac{2\pi}{5}$ radians en degrés.2. Dessiner le cercle trigonométrique puis placer les points images par enroulement des réels : $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

3. Calculer alors sans calculatrice l'expression :

$$A = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

Exercice 7. 15

1. Calculer $\sin \alpha$ sachant que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $\cos \alpha = 0,6$.
 2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = 0,8$. Déterminer $\sin x$.
 3. Soit $x \in \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$ tel que $\cos x = -0,9$. Déterminer $\sin x$.

Exercice 7. 16 (49 p 203)À partir de l'encadrement connu de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$, déterminer un encadrement des nombres suivants.

- a. $A = 3 \sin(x)$
 b. $B = \cos(x) + \sin(x)$
 c. $C = \sin(x) - 4 \cos(x)$

Exercice 7. 17Soit n un entier relatif. Donner le cosinus et le sinus des réels : $2n\pi$; $(2n+3)\pi$; $n\pi$; $-\frac{\pi}{2} + (2n-5)\pi$.**Exercice 7. 18**

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 ; \\ B &= (1 + \cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2(1 + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha) ; \\ C &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha ; \\ D &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha - 1. \end{aligned}$$

Exercice 7. 19 (64 – 66 p 204)

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants en se ramenant à des valeurs remarquables.

- a. $-\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{17\pi}{4}$ c. $-\frac{121\pi}{6}$
 d. $\frac{13\pi}{3}$ e. $-\frac{5\pi}{4}$ f. $\frac{13\pi}{6}$
 g. $\frac{7\pi}{3}$ h. $\frac{15\pi}{4}$ i. $\frac{2019\pi}{6}$

Exercice 7. 20 (70 p 204)

1. Calculer la valeur exacte des réels A et B.

$$A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Comparer A et B. Expliquer le résultat en plaçant les points associés aux réels 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique.**Exercice 7. 21** (78 p 205)Sur le cercle trigonométrique, placer les points A et B images par enroulement des réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

1. Donner les coordonnées de A et B.
 2. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de A à B ?
 3. Plus généralement, si M est le point associé au réel x , où se trouve le point N associé à $x + \pi$?
 4. Recopier et compléter les propriétés :
 « Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = \dots\dots\dots$ »
 « Pour tout réel x , $\sin(x + \pi) = \dots\dots\dots$ »

Exercice 7. 22 (79 p 205)Sur le cercle trigonométrique, placer les points A et B images par enroulement des réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

1. Donner les coordonnées de A et B.
 2. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de A à B ?
 3. Plus généralement, si M est le point associé au réel x , où se trouve le point N associé à $\pi - x$?
 4. Recopier et compléter les propriétés :
 « Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = \dots\dots\dots$ »
 « Pour tout réel x , $\sin(\pi - x) = \dots\dots\dots$ »

Exercice 7. 23 (59 p 204)

1. Rappeler les valeurs remarquables de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
 2. En remarquant que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.
 3. En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.

Exercice 7. 24Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$ les réels :

$$A = \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(2007\pi - x) ;$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x - \pi) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) ;$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \sin(\pi + x) ;$$

$$D = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos(-x - \pi) + 5 \sin(-x).$$

Exercice 7. 25

$$\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.**Exercice 7. 26**

Résoudre l'équation :

$$1. \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dans } \left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right] ;$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dans } [-2\pi; 3\pi] ;$$

3. $2 \sin^2 3x + 3 \cos 3x = 0$ dans $\left[-3\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 7. 27 (105 p 214)

On se propose de résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = -1$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1. Montrer que, pour tout réel x ,
 $(\cos(x) + \sin(x) + 1)^2 = 2(1 + \cos(x))(1 + \sin(x))$.
2. En déduire les solutions de l'équation proposée.

Exercice 7. 28

1. Résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; 5\pi]$.
2. Résoudre l'inéquation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$.
3. a. Factoriser le trinôme $-4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$.
 b. Étudier le signe de $2 \cos x + 1$ et de $-2 \cos x + \sqrt{3}$ sur $[0; 2\pi]$.
 c. En déduire le signe de $-4 \cos^2 x + (2\sqrt{3} - 2) \cos x + \sqrt{3}$.

Exercice 7. 29

1. Résoudre l'équation $4 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$ et dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre l'équation $\sin x = 2 \sin^3 x$ dans $[0; 4\pi]$.
3. Résoudre l'inéquation $-1 < \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$ dans $[-2\pi; \pi]$.

Exercice 7. 30

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les équations :

- a. $\cos(t) = \sin(2t)$;
- b. $\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- c. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

Exercice 7. 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit M un point du distinct de O .

On pose $OM = r$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ (2π).

Soit N le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 et de la demi-droite $[OM)$.

N vérifie donc l'égalité vectorielle $(E) : \overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{ON}$.

1. Justifier que $(\vec{i}; \overrightarrow{ON}) = \theta$ (2π). En déduire les coordonnées de N en fonction de θ .
2. Déduire de (E) et de la question précédente que M a pour coordonnées $(r \cos \theta; r \sin \theta)$.

Partie B

Soit C le cercle de centre O et de rayon 2, A le point de coordonnées $(2; 0)$ et B le point de C tel que

$(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Démontrer que I a pour coordonnées $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a. Démontrer que I est un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
 b. Quelle est la mesure principale de $(\vec{i}; \overrightarrow{OI})$?
 c. En déduire que I a également pour coordonnées $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}; \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{11\pi}{8}$, $\sin \frac{11\pi}{8}$, $\cos -\frac{\pi}{8}$, $\sin -\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7. 32 (Déclic 95 p 228)

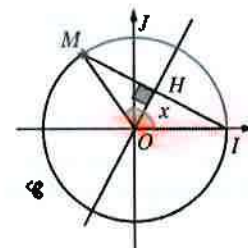
Cosinus et sinus de l'angle moitié

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

Partie A. Établissement de formules

Soit un réel $x \in [0; \pi]$.

On note M le point du cercle $\mathcal{C}$ associé à x , et H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIM .



1. a. Rappeler les coordonnées des points I et M .
 b. En déduire la distance IM en fonction de x .
2. Démontrer que $MH = \sin \frac{x}{2}$.
3. En déduire l'expression de $\sin \frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$.
4. Démontrer que $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.

Partie B. Cas général

Expliquer comment on peut calculer $\cos \frac{x}{2}$ et $\sin \frac{x}{2}$ à partir des formules précédentes dans le cas où x est un réel quelconque, pas forcément dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Partie C. Applications numériques

1. Justifier les résultats obtenus par le logiciel Xcas ci-contre.
2. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

$$\frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{3\pi}{8}$$

3. Vérifier à la calculatrice.

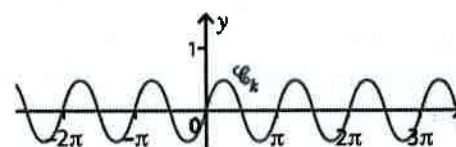
1	$\cos(\pi/8)$
	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$
2	$\sin(\pi/8)$
	$\frac{\sqrt{-(\sqrt{2})+2}}{2}$

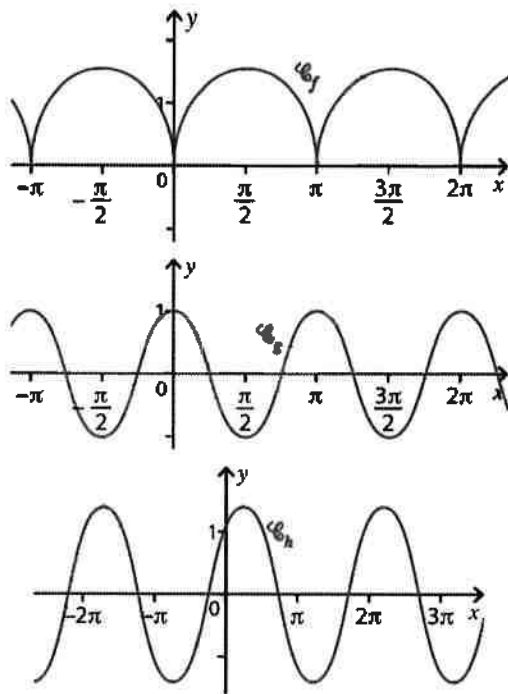
3 Fonctions cosinus et sinus

Exercice 7. 33 (Barbazo 32 p 102)

Chacune des courbes tracées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction.

- Dans chaque cas, conjecturer la périodicité et la parité des fonctions.



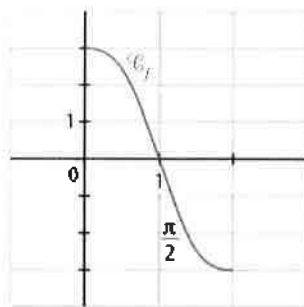
**Exercice 7. 34** (17 p 201)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin(x)$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
b. Que peut-on dire de la fonction f ?
2. Comment peut-on tracer la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$ à partir de la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; \pi]$?
3. a. Exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Que peut-on dire de la fonction f ?
4. Comment peut-on tracer la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$ à partir de la partie de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; \pi]$?

Exercice 7. 35 (80 p 205)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \cos(x)$. On a tracé ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.



1. Reproduire la courbe.
2. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter alors $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$.
3. Calculer $f(x+2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter alors $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$.

Exercice 7. 36 (82 p 205)

1. Tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis déterminer les antécédents a et b de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans cet intervalle.

2. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Placer alors les deux points images des réels a et b par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique.

Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser ?

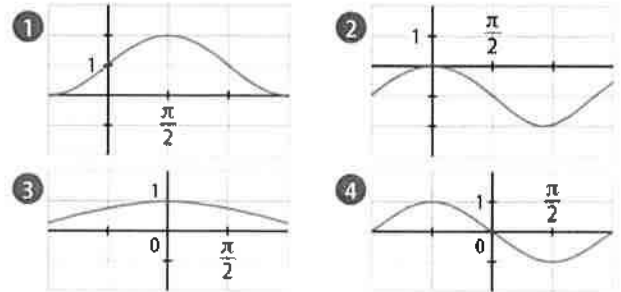
3. Procéder de même pour la résolution de l'équation

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. 37 (83 p 205)

Associer chacune des quatre fonctions suivantes à une des courbes représentatives proposées :

- a. $f(x) = 1 + \sin(x)$
- b. $g(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + 1)$
- c. $h(x) = -\sin(x)$
- d. $k(x) = \cos(x) - 1$

**Exercice 7. 38** (87 p 206)

1. Donner un encadrement de $\cos(x)$ pour tout réel x .
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3 + 2\cos(x)}{5}$.
a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour x dans l'intervalle $[0; 2\pi]$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)
c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $f(x) = \frac{4}{5}$. Le déterminer.
4. a. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π . Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de f ?
b. Étudier la parité de f . Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 7. 39 (sujet B p 213)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que la fonction f est paire.
b. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π .
3. Expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f sur $[\pi; 3\pi]$ et sur $[-3\pi; 3\pi]$ à partir de la représentation graphique de f sur $[-\pi; \pi]$.
4. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-3\pi; 3\pi]$ à l'aide d'une calculatrice.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.
6. a. Montrer qu'il existe deux réels de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin^2(x) = 1$.
Donner ces réels.

b. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ pour x appartenant à $[-\pi; \pi]$.

c. En utilisant la question 3., en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

Exercice 7. 40 (sujet D p 213)

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ par :

$$f(x) = 5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?

2. Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π .

3. Soit M le point de coordonnées $(x; f(x))$, x appartenant à $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Quelle transformation géométrique permet de passer du point M de $\mathcal{C}_f$ au point M' d'abscisse $x + \pi$ de $\mathcal{C}_f$?

4. Dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ avec un pas de $\frac{\pi}{6}$, pour x élément de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, puis sur $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Exercice 7. 41

Un projectile est lancé sous un angle de θ radians à une vitesse de $v \text{ m.s}^{-1}$, avec $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Si la résistance de l'air est ignorée, la distance R , en mètres, qu'il parcourt, indiquée ci-contre, est donnée

$$\text{par } R(\theta) = \frac{v^2}{16} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

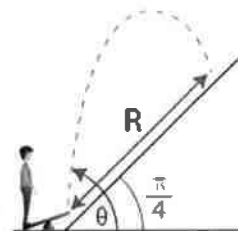
1. On prend $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : \theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \mapsto 2\theta - \frac{\pi}{4}$.

b. En déduire les variations de la fonction R sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Déterminer l'inclinaison θ pour laquelle $R(\theta)$ est maximale.

2. La vitesse initiale v influence-t-elle la valeur de θ pour laquelle $R(\theta)$ est maximale ?



A1 Approximation de π par la méthode d'Archimède (p200)

Archimède, en 250 avant J.-C., détermine une valeur approchée de π en construisant des polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle de rayon 1. Il obtient un encadrement de π avec les demi-périmètres de ces polygones puisque le périmètre de ce cercle est 2π . Ces polygones réguliers ont tous leurs côtés égaux et les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$... sont aussi égaux.

Archimède commence par construire un hexagone régulier inscrit (en bleu) et un hexagone régulier circonscrit (en rouge), puis les polygones suivants sont obtenus en doublant le nombre de côtés. Archimède continue alors jusqu'à 96 côtés.

On s'intéresse ici au polygone inscrit, coloré en bleu sur la figure ci-contre.

① L'hexagone régulier (6 côtés)

a. Déterminer la nature du triangle OAB , puis la longueur du segment $[AB]$.

b. En considérant l'hexagone, déterminer p_1 , première valeur approchée de π .

② Passage d'un hexagone inscrit à un polygone inscrit ayant 12 côtés

Sur la figure ci-contre, $[AB]$ est un côté de l'hexagone inscrit dans la question 1, de demi-périmètre p_1 , et $[AJ]$ et $[JB]$ sont des côtés du polygone inscrit à 12 côtés.

On pose $AB = c_1$, et $AJ = c_2$.

a. Rappeler la valeur de c_1 . Calculer la longueur OI en fonction de c_1 à l'aide du théorème de Pythagore.

b. En déduire la longueur IJ , puis la longueur AJ en fonction de c_1 .

c. En déduire la valeur de p_2 , seconde approximation de π par cette méthode.

③ Généralisation : calcul d'une valeur approchée de π par défaut

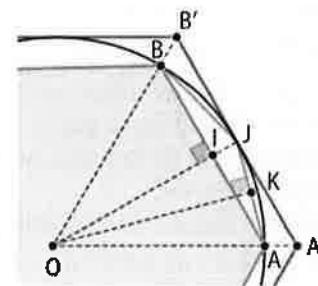
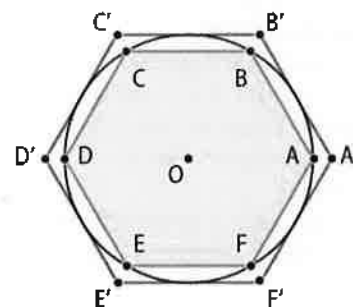
Soit c_n la mesure d'un côté du polygone inscrit à $3 \times 2^{n+1}$ côtés.

Le calcul fait pour le passage de 6 à 12 côtés se généralise et on obtient la formule

$$\text{suivante : } c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}\right)^2}.$$

a. Programmer une fonction Python retournant p_n , valeur approchée de π par défaut obtenue pour un polygone à 3×2^n côtés.

b. À l'aide de cette fonction, déterminer la valeur approchée de π par défaut obtenue par Archimède avec 96 côtés.



8 Produit scalaire

1 Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

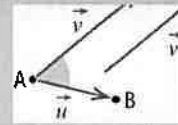
u et v est le nombre réel noté $u \cdot v$

invariant.

si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$ où θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Autrement dit, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.



Remarque

$[\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ mais la réciproque est fausse.

Par exemple dans un triangle ABC rectangle en A : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{2} = 0$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non nuls.

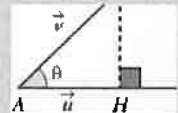
Conséquences

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, $\cos \widehat{BAC} = \cos 0 = 1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\cos \widehat{BAC} = \cos \pi = -1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce produit scalaire est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, et on a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Propriété 8.1

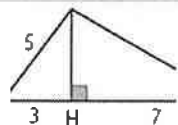
Soient trois points A, B, C (A et B distincts) et H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$



Exemple 8.2

considère le triangle EFG dans lequel on note H le pied de la hauteur issue de F . On suppose que $EF = 5$, $EH = 3$ et $HG = 7$.
Calculer $\vec{EF} \cdot \vec{EG}$, $\vec{GE} \cdot \vec{GH}$, $\vec{HF} \cdot \vec{HE}$.



symétrie et bilinéarité du produit sc

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un nombre réel.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

On dit que le produit scalaire est symétrique (i) et bilinéaire (ii et iii).

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5 ; \|\vec{v}\| = 6 ; \vec{u} \cdot \vec{v} = 15.$$

Déterminer $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Calculer $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$.

produit scalaire dans une base orthonormée

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors :

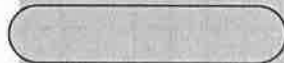
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque

Si $\vec{u}(x; y)$ on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ donc l'égalité $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ s'écrit $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Elle est
symétrique
C'est pas une
opération (pas
commutative)
Mais bon bref !!

2 Orthogonalité de deux vecteurs



vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.



caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conséquences

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un R.O.N.

Exemple 8.5
(229)

On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(2, 1)$, $D(5, 4)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Déterminer le réel m tel que $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

3 Applications du produit scalaire

identités remarquables du produit scalaire

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ie : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ie : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ ie : $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Soit ABC un triangle tel que :
 $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 9$.
 Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

Remarque

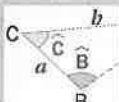
- les deux premières égalités donnent d'autres expressions du produit scalaire :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- Dans un triangle ABC la deuxième égalité permet d'écrire : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
 On constate que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (th de Pythagore)

d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} ;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B} ;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$


Dans un triangle DEF , $DE = 4$,
 $DF = 7$ et $\hat{D} = 60^\circ$.

1. Calculer la longueur EF .
2. Calculer la mesure de l'angle $\hat{E}$.

Remarque

- Ce théorème permet de déterminer les mesures des angles d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés ou la longueur d'un côté connaissant les deux autres et une mesure de l'angle opposé.
- Si le triangle est rectangle en A , on retrouve le théorème de Pythagore.

Propriété 8.7

Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Alors, pour tout point M :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} ;$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA} ;$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2.$$



Exemple 8.8

- ... [AB].
1. Calculer CI , en déduire $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
 2. Calculer $\vec{CI} \cdot \vec{AB}$.

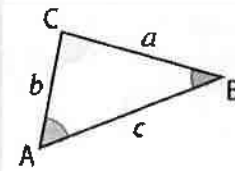
Conséquence

L'égalité $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$ permet d'affirmer que l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. En effet, si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ alors $MI^2 - IA^2 = 0$ donc $MI^2 = IA^2$. Avec $IM \geq 0$ et $IA \geq 0$ on a alors $IM = IA$ donc M est un point du cercle de centre I et de rayon IA .

D1 Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

1. Justifier que $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$.
2. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos(\widehat{BAC})$.
3. En déduire la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

**CORRIGÉ**

1. En utilisant l'expression du produit scalaire avec les longueurs dans le triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2} [c^2 + b^2 - a^2], \text{ ainsi on obtient } 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2.$$

2. En utilisant l'expression du produit scalaire avec le cosinus dans le triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = bc \cos(\widehat{BAC}).$$

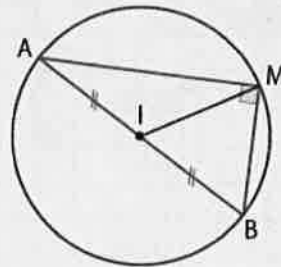
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, on obtient $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

Il vient finalement $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

D2 Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Rappel : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Soit M un point du plan.



1. a. Exprimer de deux façons différentes $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$.

b. En déduire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3. En déduire que le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B .

CORRIGÉ

1. a. D'une part, $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

D'autre part, en utilisant la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}.$$

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = 0$.

En conséquence, on obtient $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.

b. D'après ce qui précède, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$. Or, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA \times IB = MI^2 - \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ revient, d'après la question précédente, à déterminer l'ensemble des points M tels que $MI^2 = \frac{AB^2}{4}$.

Comme $MI \geq 0$ et $AB \geq 0$, cette dernière égalité est équivalente à $MI = \frac{AB}{2}$. Ainsi, l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

3. D'après la question 2., M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont non nuls, ce qui est équivalent, par propriété de l'orthogonalité, au fait que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux et non nuls. Or, par définition, des vecteurs non nuls $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.

Donc ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B .

Démonstration 1 : Symétrie du produit scalaire

En utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs, donner l'expression de $\vec{v} \cdot \vec{u}$ et en déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Démonstration 2 : Angle dans un triangle

Rappel : La mesure principale d'un angle orienté

$(\vec{u}, \vec{v})$ est l'unique réel $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que

$(\vec{u}, \vec{v}) = \theta [2\pi]$.

Soit A, B, C trois points distincts. On considère θ la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on pose $\widehat{BAC} = |\theta|$.

1. Justifier que $\cos(\theta) = \cos(\widehat{BAC})$.
2. En utilisant l'expression du produit scalaire avec le cosinus, démontrer que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.

Démonstration 3 : Identités remarquables du produit scalaire

1. En remarquant que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, démontrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
2. En déduire que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
3. Démontrer que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration 4 : Expression du produit scalaire avec les normes

Développer l'expression $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et en déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$.

Démonstration 5 : Expression du produit scalaire avec les longueurs d'un triangle

Soit A, B, C trois points du plan.

1. Écrire sous la forme d'un vecteur la différence $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$.

Démonstration 6 : Démonstration d'une relation d'Al-Kashi

1. Calculer $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ de deux façons : en utilisant la relation de Chasles et en développant le carré scalaire.
2. En déduire la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

Démonstration 7 : Orthogonalité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, déterminer les mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.
b. En déduire la valeur de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Faire la synthèse des questions précédentes et conclure.

Démonstration 8 : Propriété du produit scalaire avec les projetés orthogonaux

Soit A, B, C, D quatre points distincts et soit A' et B' , les projetés orthogonaux respectifs sur la droite (CD) des points A et B .

1. Quelle est la valeur de $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CD}$? Justifier.
2. En utilisant la relation (de Chasles) suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Démonstration 9 : Propriété du produit scalaire avec les projetés orthogonaux

Soit A, B, C trois points distincts, θ la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. a. Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB' \times AC$.

2. Si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB' \times AC$.

Démonstration 10 : Formule de la médiane**Rappels**

1. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

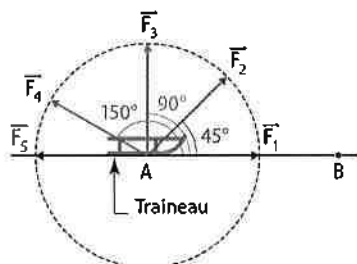
Soit un segment [AB] ainsi que son milieu I et soit M un point du plan.

1. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$, justifier que $MA^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2$.

2. En déduire que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Activité 1 : découvrir le produit scalaire (p 220)

Baptiste débute comme pilote d'attelage. Il s'entraîne sur une trajectoire rectiligne de A vers B. On exerce une force $\vec{F}$ sur le traîneau et on s'intéresse à son influence sur le déplacement.



1. a. Parmi les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$ représentées ci-dessus, quelles sont celles qui semblent favorables au mouvement ? Celles qui semblent s'y opposer ? Celles qui semblent ne pas avoir d'effet sur le mouvement du traîneau ?
- b. D'une façon plus générale, à quelles conditions une force est-elle favorable au déplacement ? Défavorable ? Sans effet ?

2. En physique, Coriolis appelle travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A vers B la quantité W égale à $F \times AB \times \cos(\alpha)$. W représente une énergie et s'exprime en joules, F est la norme de $\vec{F}$ exprimée en newtons, AB est en mètres et α est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Dans l'exemple précédent, on suppose que les forces $\vec{F}_i$ ont une intensité égale à 400 newtons et que la distance AB vaut 1 000 m.

- a. Calculer et comparer les quantités W pour chacune de ces forces.

Commenter à l'aide du signe de W les conjectures établies à la question 1. b..

- b. Quelle est la force la plus favorable au déplacement ? La plus défavorable ?

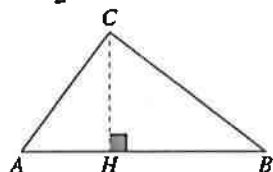
La quantité W est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ et on note cette opération $\vec{F} \cdot \vec{AB}$.

Ainsi, $\vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\alpha)$.

Activité 2 : découvrir une formule métrique du produit scalaire et la formule d'Al-Kashi

On considère un triangle acutangle ABC (ie : dont tous les angles sont aigus). On souhaite établir, à l'aide d'outils élémentaires, la formule métrique du produit scalaire suivante :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (E)$$



1. On considère H le pied de la hauteur issue de C .
- a. Exprimer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de AH et AB .

- b. En exploitant le théorème de Pythagore, exprimer AC^2 et CB^2 en fonction de CH , AH et AB .

- c. En déduire l'égalité (E) puis la formule dite d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$.

La formule d'Al-Kashi est appelée « théorème de Pythagore généralisé ». Expliquer pourquoi.

2. Applications

En utilisant la formule métrique du produit scalaire ou la relation d'Al-Kashi, répondre aux questions suivantes.

- a. Déterminer les mesures des angles d'un triangle ABC de côtés $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$ (donner une valeur arrondie au degré près).
- b. Déterminer la longueur exacte du troisième côté d'un triangle DEF vérifiant $DE = 3$, $EF = 5$ et $\widehat{DEF} = 60^\circ$.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

Exercice 8. 1 (43 p 230)

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5 et I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 8. 2

ABCD est un carré de côté 4, BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu du côté [BC].

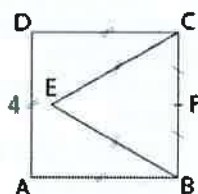
Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$

b) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$

c) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$

d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$



Exercice 8. 3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$ et $C(2; 0)$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AB}^2$

d) AB

Exercice 8. 4

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC = 5$. D, E et F sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].

On introduit le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$.

a) Réaliser une figure et déterminer les coordonnées des points A, D, E et F.

b) Calculer $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ED}$ et interpréter le résultat.

Exercice 8. 5 (53 p 230)

Soit un carré ABCD de centre O et de côté 5. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD].

Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IB}$

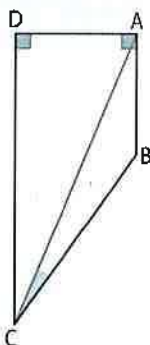
Exercice 8. 6 (87 p 233)

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $DC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

2. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et en déduire une valeur approchée de la mesure l'angle $\widehat{ACB}$, au degré près.



Exercice 8. 7

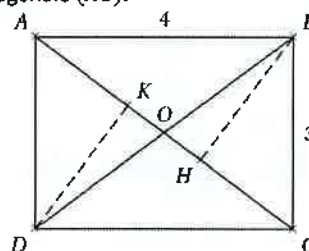
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 2)$, $B(2; 3)$ et $C(4; 1)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\cos(\widehat{BAC})$. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir à l'unité.

Exercice 8. 8

ABCD est un rectangle de longueur 4 cm, de largeur 3 cm et de centre O. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



- En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$, calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
- En exprimant d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$, déterminer HK.
- Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{CA; BD})$.

Exercice 8. 9 (79 p 232)

Soit les points $A(-6; 4)$, $B(-2; 2)$ et $C(5; -7)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

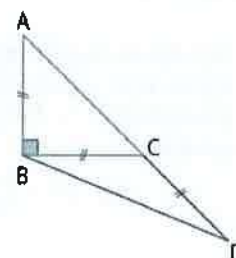
2. On note H le projeté orthogonal de A sur [BC].

Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. Calculer BC. En déduire BH et HC.

Exercice 8. 10 (sujet D p 241)

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que $BA = 1$. On construit extérieurement au triangle ABC un point D tel que le triangle BCD soit isocèle en C. On admet que les points A, C et D sont alignés. On se place dans le repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



- a. Calculer la longueur du segment [AC]. En déduire celle du segment [AD].
- Montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$ et déterminer sa valeur.
- En déduire les coordonnées de D.
- Déterminer la mesure exacte, en radians, de l'angle $\widehat{BCD}$ puis des angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{DBC}$.
- a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$.
- En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 8. 11 (129 p 235)

Soit trois points A, B et C sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soit I le milieu de [BC] et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle.

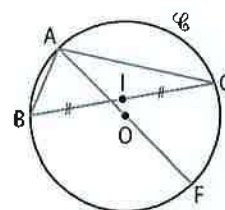
1. Démontrer que :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AB^2$

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = AC^2$

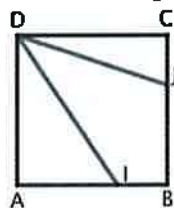
2. a. Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

b. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AF}$.



Exercice 8. 12

$ABCD$ est un carré de côté 4. I est un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et J est un point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.



Dans les questions 1 et 2 on se propose de déterminer, de deux façons différentes, une mesure en degré de l'angle $\widehat{IDJ}$, arrondie au degré près.

1. Première méthode.

a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC}$ et calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.

b. Conclure.

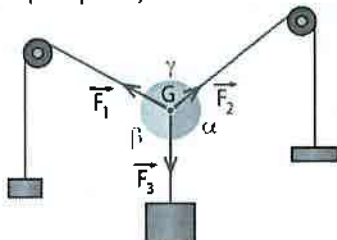
2. Seconde méthode.

On considère le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

a. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.

b. En déduire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$ et conclure.

3. On suppose que $ABCD$ est un carré quelconque et on pose $l = AB$. Démontrer que $\widehat{IDJ}$ est indépendant de l .

Exercice 8. 13 (157 p 245)

Le schéma ci-dessus représente un système de poulies. On considère les forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ s'appliquant en G et d'intensités respectives : $\|\vec{F}_1\| = 8$ N, $\|\vec{F}_2\| = 6$ N et $\|\vec{F}_3\| = 12$ N.

Soit $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ la résultante de ces forces.

1. Déterminer en fonction de α , β et γ les produits scalaires suivants : $\vec{R} \cdot \vec{F}_1$, $\vec{R} \cdot \vec{F}_2$ et $\vec{R} \cdot \vec{F}_3$.

2. On suppose que le système de poulies est à l'équilibre, c'est-à-dire que $\vec{R} = \vec{0}$.

a. Montrer que les réels α , β et γ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\cos\beta = -6 \\ 6\cos\beta + 3\cos\gamma = -4 \\ 6\cos\alpha + 4\cos\gamma = -3 \end{cases}$$

b. En utilisant la troisième équation, montrer que :

$$\cos\gamma = -\frac{1}{4}(3 + 6\cos\alpha)$$

c. En déduire que les réels α et β vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 4\cos\beta = -6 \\ 18\cos\alpha + 4\cos\beta = -3 \end{cases}$$

d. En déduire les valeurs, arrondies au dixième de degré, des mesures des angles α , β et γ .

Exercice 8. 14 (Barbazo 91 p 235)

Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à d . On note H le projeté orthogonal de A sur d et M un point quelconque de d .

1. Justifier que $AM^2 \geq AH^2$. En déduire que la distance AH est la plus petite des distances de A aux points de d . AH est appelée la **distance du point A à la droite d** .

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $(x_A; y_A)$ les coordonnées de A , $(x_H; y_H)$ les coordonnées de H et $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de d .

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

b. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ de deux façons différentes, démontrer que $AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3. **ALGO PYTHON** Écrire le script d'une fonction Python dont les arguments sont les coordonnées respectives de trois points A , B et C et qui renvoie la hauteur du triangle ABC issue de A .

2 Orthogonalité de deux vecteurs**Exercice 8. 15 (71 p 231)**

Soit les points $A(-2; 3)$, $B(7; 0)$, $C(4; 5)$ et $D(2; -1)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 8. 16 (73 p 231)

Soit les points $A(2; 4)$, $B(-4; 6)$, $C(-2; 0)$ et $D(4; -2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{BD}^2$.

4. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

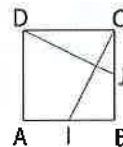
Exercice 8. 17 (75 p 232)

Soit le triangle EFG tel que $E(0; 1)$, $F(8; -3)$ et $G(12; 5)$.

Le point $H(7; 0)$ appartient-il à la hauteur issue de F ?

Exercice 8. 18 (80 p 232)

$ABCD$ est un carré, tel que I et J sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$. Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.



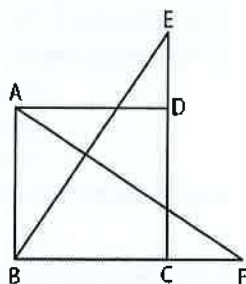
Exercice 8. 19 (124 p 235)

ABCD est un carré de côté 1.

On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :

- en décomposant $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$;
- en se plaçant dans le repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

**Exercice 8. 20** (sujet B p 243)

Soit ABCD un rectangle de longueur $AB = 5$ et de largeur $AD = 2$. Soit M un point du segment [AB] distinct de A et de B, tel que $AM = x$.

- Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 5x$.
- Pour quelle valeur de x les droites (MD) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?
- Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 - 5x + 4$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle MCD est-il rectangle en M ?
- a. Rappeler le lien entre la nature de l'angle $\widehat{CMD}$ et le signe de $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}$.
b. Pour quelle(s) valeur(s) de x , l'angle $\widehat{CMD}$ est-il obtus ?

Exercice 8. 21

Dans le carré direct ABCD, de côté égal à l'unité de longueur, on considère les points I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5} \overrightarrow{CB}$. Un point M décrit le segment [DC]. On pose $\overrightarrow{DM} = x \overrightarrow{DC}$.

- En utilisant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ déterminer x pour que les droites (IJ) et (BM) soient perpendiculaires.
- Dans la suite, on désigne par K le point de [DC] tel que $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{DC}$.
a. Le triangle IJK est-il rectangle ?
b. Déterminer une valeur approchée, à $0,1^\circ$ près, de l'angle $\widehat{IJK}$.
- Soit H le point d'intersection des droites (BK) et (IJ) et L le point d'intersection de la droite (IJ) avec la parallèle à (BK) passant par D.
a. Etablir que $IJ = KB = \frac{\sqrt{29}}{5}$.
b. Justifier que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK} = IJ \times LH$. En calculant $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK}$ d'une autre façon déterminer la valeur de LH.
c. En calculant $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KB}$ de deux façons, déterminer KH.
d. On admet que $DL = \frac{4}{\sqrt{29}}$. Déterminer l'aire du trapèze DLHK.

Exercice 8. 22

$\widehat{xOy}$ est un angle droit, $OA = OC$ et $AB = CD$. I est le milieu de [AD].

Le but de l'exercice est de montrer, avec deux méthodes différentes, que les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Méthode 1

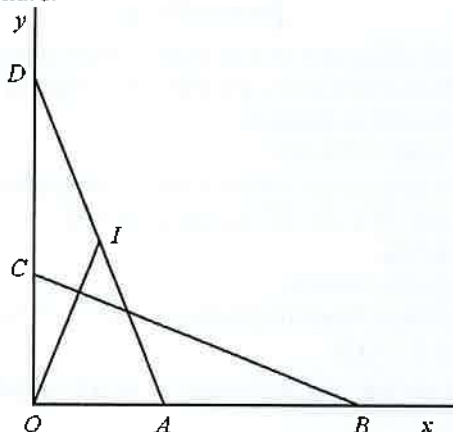
- Montrer que $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$.
- En déduire que $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$.

- Calculer $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis conclure.

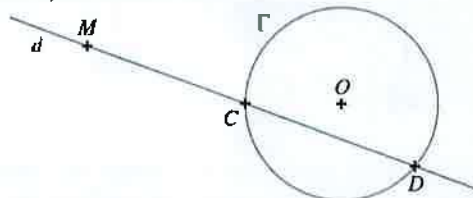
Méthode 2

On considère le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{OD} = b\vec{j}$, où a et b désignent deux réels strictement positifs.

- Calculer en fonction de a et b les coordonnées de A, D, B, C et I.
- Conclure.

**Exercice 8. 23** (Déclic 113 p 265)**Puissance d'un point par rapport à un cercle**

On considère un cercle Γ , de centre O et de rayon R , et un point M du plan. Pour toute droite d du plan passant par M , on note C et D les points d'intersection, s'ils existent, du cercle Γ et de la droite d .



- Soit une droite d passant par M pour laquelle les points C et D existent (ils sont éventuellement confondus).

- Quel est le signe de $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ dans le cas où :
• M est à l'intérieur du cercle Γ ?
• M appartient au cercle Γ ?
• M est à l'extérieur du cercle Γ ?

- Soit C' le symétrique de C par rapport à O. Montrer que :

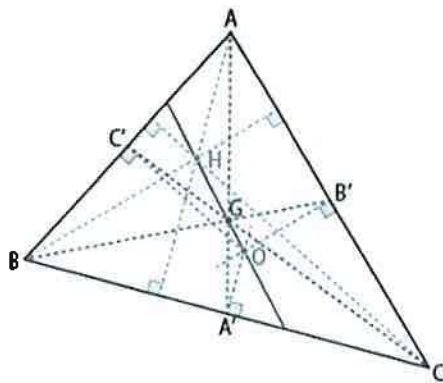
$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC'} = OM^2 - R^2$$

- Que peut-on dire du produit scalaire $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ lorsque la droite d pivote autour de M ?

- Soit un réel $k > -R^2$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = k$.

Exercice 8. 24 (155 p 244)

Soit ABC un triangle non équilatéral. On désigne par G le centre de gravité du triangle (c'est-à-dire le point de concours de ses médianes), par O le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle (c'est-à-dire le point de concours des médiatrices) et par H son orthocentre. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].



On rappelle que le point G vérifie l'égalité vectorielle : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

1. Soit le point K tel que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OK}$.

a. Montrer que $\vec{AK} = 2\vec{OA}$. En déduire que la droite (AK) est perpendiculaire au côté [BC].

b. Démontrer de même que la droite (BK) est perpendiculaire au côté [AC].

c. En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC, donc que K et H sont confondus.

2. Montrer que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.

Cette égalité prouve que les points O, G et H sont alignés. La droite qui porte ces trois points s'appelle la « droite d'Euler ».

3 Applications du produit scalaire

Exercice 8. 25 (106 p 234)

produit scalaire et norme

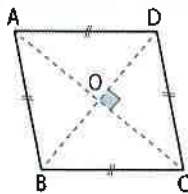
Soit ABCD un losange de centre O tel que AC = 8 et BD = 6.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.

2. a. Simplifier la somme vectorielle $\vec{AB} + \vec{AD}$.

b. En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

3. Justifier l'égalité $\vec{DA} - \vec{CD} = \vec{DB}$ puis calculer $\vec{DA} \cdot \vec{CD}$.



Exercice 8. 26 (108 p 234)

produit scalaire et norme

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2. En remarquant que $\vec{BC} = (\vec{BA} + \vec{AC})$, calculer BC.

3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.

Exercice 8. 27 (109 p 234)

produit scalaire et norme

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2. En remarquant que $\vec{BC} = (\vec{BA} + \vec{AC})$, calculer BC.

3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.

Exercice 8. 28 (89 p 233)

Al-Kashi

Le triangle DEF est tel que DE = 6, DF = 3 et $\widehat{D} = \frac{\pi}{4}$. Calculer EF.

Exercice 8. 29 (96 p 233)

Al-Kashi

Dans un triangle ABC on a AB = 6, AC = 4 et BC = 5.

1. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$, puis $\widehat{BAC}$ au degré près.

2. Donner la valeur exacte de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Exercice 8. 30 (94 p 233)

Al-Kashi

Soit un triangle DEF tel que DE = 9, DF = 4 et $\widehat{EDF} = 65^\circ$.

1. Donner une valeur approchée de EF à 0,1 près.

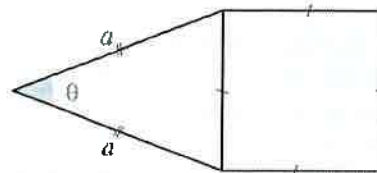
2. En déduire une valeur approchée des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DFE}$, au dixième de degré près.

Exercice 8. 31 (103 p 234)

Al-Kashi

La figure ci-dessous est constituée d'un carré et d'un triangle isocèle. On veut déterminer pour quelle valeur de θ le carré et le triangle isocèle ont le même périmètre.

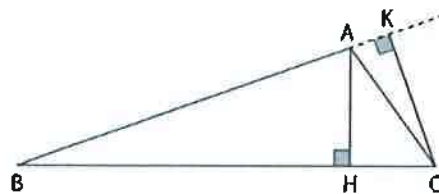
Calculer une valeur de θ à 0,1 degré près.



Exercice 8. 32 (sujet E p 243)

Al-Kashi

On considère un triangle ABC tel que BC = 7, AC = 2 et AB = 6. Soit H le pied de la hauteur issue de A, et K le pied de la hauteur issue de C.



1. a. Justifier que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

b. En déduire les produits scalaires suivants : $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ puis $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

c. Exprimer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en fonction de la longueur BH.

d. En déduire la longueur BH.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en fonction de la longueur BK.

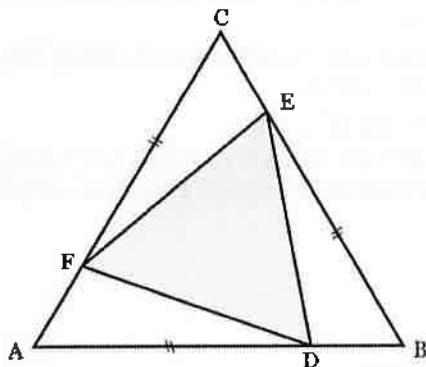
b. En déduire que $BK \times BA = BH \times BC$.

c. En déduire la longueur BK.

3. a. Calculer la mesure, au degré près, de l'angle $\widehat{ABC}$.

b. En déduire la longueur KH arrondie à l'unité, puis la mesure au degré près de l'angle $\widehat{KAH}$.

Exercice 8. 33 (livrescolaire 71 p 271) *Al-Kashi*
 Dans un triangle équilatéral ABC de côté 1, on place les points D , E et F comme indiqué sur la figure. Le but de l'exercice est de minimiser l'aire du triangle DEF .



1. Posons $x = AD$. En utilisant la relation d'Al-Kashi, déterminer les longueurs DE , EF et FD en fonction de x .
2. Quelle est la nature du triangle DEF ?
3. Démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ et en déduire que l'aire de DEF est minimale si DE est minimale.
4. a. Montrer que, pour tout $x > 0$,
 $3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.
 b. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ?

Exercice 8. 34 (Hatier 156 p 246) *points cocycliques*
 Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point K .

1. On suppose que les points A , B , C et D sont cocycliques, c'est-à-dire qu'il existe un point I tel qu'un cercle $\mathcal{C}$ de centre I passe par ces quatre points. On note A' le point tel que $[AA']$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

- a. Justifier que $(KB) \perp (BA')$.
 - b. Prouver que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = KI^2 - AI^2$.
 - c. Prouver que $\vec{KC} \cdot \vec{KD} = KI^2 - CI^2$.
 - d. En déduire que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = \vec{KC} \cdot \vec{KD}$.
2. Réciproquement, on suppose que $\vec{KA} \cdot \vec{KB} = \vec{KC} \cdot \vec{KD}$. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC . La droite (KC) coupe alors le point $\mathcal{C}$ en un point E , non confondu avec le point C .
- a. En utilisant le résultat de la question 1d, prouver que $\vec{KC} \cdot \vec{KD} = \vec{KC} \cdot \vec{KE}$.
 - b. En déduire que les vecteurs $\vec{KC}$ et $\vec{DE}$ sont orthogonaux, puis que $\vec{DE} = \vec{0}$.
 - c. Conclure quant à la cocyclicité des points A , B , C et D .

Exercice 8. 35 (Hatier 94 p 238) *th médiane*

- a. Un segment $[AB]$ est de longueur 9 et de milieu I . Sachant qu'un point M est tel que $MA = 4$ et $MB = 7,5$, calculer la distance MI .
- b. Dans un triangle DEF , on note E' le milieu de $[DF]$. Sachant que $EE' = 10$, $DE = 15$ et $DF = 21$, calculer la distance EF .

c. Un triangle GHL est tel que $GH = 7$, $GL = 12$ et $HL = \sqrt{60}$. Calculer la longueur des médianes issues de H et de L .

Exercice 8. 36 (livrescolaire 58 p 270) *th médiane*

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 15$, $BC = 13$ et $AC = 14$.

1. Déterminer la longueur BD .
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré près.

Exercice 8. 37 (livrescolaire 55 p 270) *th médiane*

Dans le triangle ABC , on note A' le milieu de $[BC]$. On donne les mesures suivantes : $AA' = 6$, $A'B = 4$ et $(\vec{A'A}, \vec{A'B}) = \frac{\pi}{3}$.

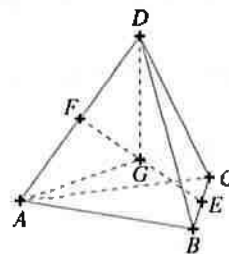
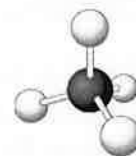
1. À l'aide d'une des formules du théorème de la médiane, calculer $AB^2 + AC^2$.
2. a. Calculer $\vec{A'A} \cdot \vec{A'B}$.
 b. Écrire $\vec{CB}$ en fonction de $\vec{A'B}$.
 c. En déduire $\vec{CB} \cdot \vec{AA'}$ et $AB^2 - AC^2$.
3. Quelles sont alors les longueurs des côtés du triangle ABC ?

Exercice 8. 38 (Déclic 94 p 262)

th médiane

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier ;
 - le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.
- Le but de cet exercice est de déterminer la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène.



On considère le tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête a . E et F sont les milieux respectifs des arêtes $[CB]$ et $[AD]$. On admet que le centre G du tétraèdre est situé au milieu du segment $[EF]$ et qu'il est équidistant des sommets A , B , C et D .

1. En se plaçant dans des triangles bien choisis, montrer que $DE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
2. On se place dans le triangle AED .
 a. Calculer la longueur EF , en déduire GE .
 b. Montrer alors que $GA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. Pour ce calcul, on

pourra utiliser le « théorème de la médiane ».

3. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{AGD}$ arrondie au degré. Conclure.

Exercice 8. 39 (Dédic 100 p 262) *lignes de niveaux*

Soient A et B deux points tels que $AB = 4$. Pour tout réel k , on note L_k l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

2. Déterminer puis construire, lorsque cela est possible, l'ensemble L_k dans les cas suivants.

a. $k = -7$ b. $k = -4$ c. $k = 0$ d. $k = 5$

3. Déterminer la nature de l'ensemble L_k selon les valeurs du réel k .

4. Soit un point C tel que ABC soit un triangle équilatéral. Déterminer la valeur du réel k tel que $C \in L_k$.

Exercice 8. 40 (Barbazo 82 p 234) *lignes de niveaux*

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(2; -1)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. On veut réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

a. Placer le point A et créer le vecteur $\vec{u}$.

b. Créer trois points M_1, M_2 et M_3 puis les vecteurs $\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AM_3}$.

c. Calculer, avec le logiciel, les produits scalaires $\overrightarrow{AM_1} \cdot \vec{u}$, $\overrightarrow{AM_2} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_3} \cdot \vec{u}$.

d. En déplaçant les points M_1, M_2 et M_3 , conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 16$.

2. On veut démontrer cette conjecture. On considère un point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$. Déterminer la valeur de k telle que C appartienne à la ligne de niveau cherchée.

3. Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = 0$. En déduire la ligne de niveau cherchée.

Exercice 8. 41 (Barbazo 83 p 234)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3; -1)$ et $B(1; 1)$. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 10$ (cet ensemble est appelé ligne de niveau 10).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire trois points M_1, M_2 et M_3 appartenant à cette ligne de niveau.

2. En développant l'expression $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, montrer que la ligne de niveau cherchée est équivalente à la ligne de niveau $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$, où I est le milieu de $[AB]$.

3. Démontrer, en utilisant l'exercice précédent, que cette ligne de niveau est une droite dont on donnera les caractéristiques.

10 probabilités conditionnelles

1 Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P . A , B et C sont trois événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

Définition 10.1

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre $P_A(B)$ (« P de B sachant A ») défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(B|A)$$

Exemple 10.1

Dans une classe de première, 55 % des élèves sont des filles et 40 % des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

Conséquences

- $P_A(B) \in [0; 1]$;
- $P_A(\Omega) = 1$;
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$;
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- $P_A(\emptyset) = 0$;
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$;
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$;
- $P_A(A) = 1$.

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrée permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B ;
- $P(A)$ (resp $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (resp ligne) ;
- $P_A(B)$ s'obtient en calculant le quotient des probabilités $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Exemple 10.2

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,4	0,3	0,7
$\bar{A}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,6	0,4	1

Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P_B(\bar{A})$ et $P_{\bar{A}}(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

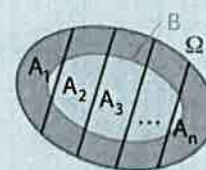
2 Formule des probabilités totales

Propriété 10.1

On considère un événement B et des événements non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Ω deux à deux disjoints (ou incompatibles) dont la réunion forme l'univers Ω .

- On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω (ou est un système complet d'événements).
- $P(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i \cap B)$.

partition, formule des probabilités totales



Remarque

Si $0 < P(A) < 1$, les événements A et $\bar{A}$ partitionnent Ω donc $P(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$.

Utilisation d'un arbre

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilités par un arbre et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.

On appelle arbre pondéré un arbre pour lequel chaque branche est associée à une probabilité, comme ci-dessous.

Etape 1	Etape 2	Evénement	Probabilité de l'événement
	$p_A(B)$ B	$A \cap B$	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
	$p_A(\bar{B})$ $\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p_A(\bar{B})$
	$p_{\bar{A}}(B)$ B	$\bar{A} \cap B$	$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$
	$p_{\bar{A}}(\bar{B})$ $\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B})$

Règles d'utilisations :

1. La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
2. La probabilité d'un événement représenté par un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Exemple 10.3

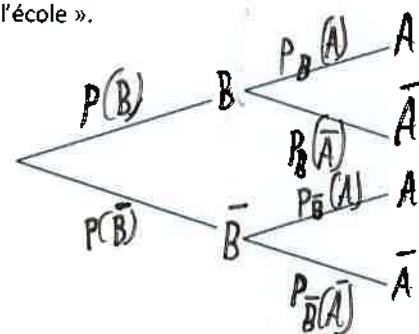
Exemple 10.3

Un élève de terminale a 80 % de chance d'avoir le bac. Pendant les vacances d'été qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves, bacheliers ou non.

Lorsqu'un élève a eu le bac il a 60 % de chance de réussir le concours, 30 % sinon.

On note B l'événement « réussir le bac » et A l'événement « admis à l'école ».

1. Déterminer $p(B)$, $p(\bar{B})$, $p_B(A)$ et $p_{\bar{B}}(A)$.
2. Représenter l'expérience décrite en complétant l'arbre ci-contre.
3. Calculer la probabilité que l'élève ait le bac et soit admis à l'école.
4. Quelle est la probabilité que l'élève n'ait pas le bac et soit admis à l'école ?
5. Déterminer la probabilité que l'élève soit admis à l'école.
6. On interroge un élève de l'école. Quelle est la probabilité qu'il ait le bac ?



3 Indépendance

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω muni d'une probabilité P .

Définition 10. 2

A et B indépendants

On dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 10. 2

A et B indépendants

Si $P(A) \neq 0$, A et B indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Remarque

- $P_A(B) = P(B)$ signifie que la réalisation de B ne dépend pas de la réalisation de A

- On peut démontrer que si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants et donc que A et $\bar{B}$ ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exemple 10. 4

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

Succession de deux épreuves indépendantes

Lorsque deux épreuves sont indépendantes la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple 10. 5

Un sac contient dix jetons dont trois sont verts.

On pioche successivement, au hasard, avec remise, deux jetons du sac. On appelle V_1 l'évènement « obtenir un jeton vert au premier tirage » et V_2 l'évènement « obtenir un jeton vert au second tirage ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de $V_1 \cap V_2$ et de $\bar{V}_1 \cap V_2$.

Démonstration 1 : indépendance avec événement contraire

Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

1. Dans cette question, on suppose A et B indépendants.

a. Écrire la définition du fait que $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.

b. En remarquant que $B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$, montrer que $P(B) = P(B) \times P(A) = P(B \cap \bar{A})$.

c. En déduire que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$.

2. En utilisant la question précédente, et sans autre calcul, montrer que, réciproquement, si $\bar{A}$ et B sont indépendants, alors A et B sont indépendants.

3. **Complément** : expliquer pourquoi la proposition 1 permet aussi d'affirmer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont également indépendants si A et B le sont.

Démonstration 2 : probabilité sachant un événement

Soit A un événement relatif à une expérience aléatoire d'univers Ω fini et tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B relatif à la même expérience aléatoire, on pose $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

1. Justifier le fait que $P(A \cap B) \leq P(A)$.

2. Montrer que pour tous événements B et C relatifs à l'expérience aléatoire considérée, on a :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. Démontrer que la fonction P_A est une probabilité sur l'univers Ω .

Démonstration 3 : condition nécessaire et suffisante à l'indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire, avec $P(A) \neq 0$.

1. Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$.

2. Démontrer que la réciproque est également vraie.

Démonstration 4 : formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ une partition d'un univers dont chaque événement est de probabilité non nulle et B un événement de cet univers.

1. Justifier l'égalité des deux événements B et $(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)$.

2. En déduire que :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k).$$

Activité 1 : découvrir la notion de probabilité conditionnelle

Le tableau ci-contre donne la répartition des 1 230 élèves d'un lycée en fonction du sexe et du niveau de la classe de l'élève.

On choisit un élève du lycée au hasard.

On note respectivement S , P , T et F les événements « l'élève est en Seconde », « l'élève est en Première », « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille ».

	Fille	Garçon
Seconde	187	233
Première	207	178
Terminale	212	213

Les probabilités seront données sous forme fractionnaire.

1. a. Calculer la probabilité des événements S , P , T et F .
- b. Décrire par une phrase l'événement $S \cap F$ et calculer sa probabilité.
2. On choisit un élève au hasard parmi les élèves de Seconde.
 - a. Combien d'élèves peuvent être tirés au sort ?
 - b. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille. On la note $P_S(F)$.
 - c. Exprimer $P_S(F)$ en fonction de $P(S)$ et de $P(S \cap F)$.
3. On choisit un élève au hasard parmi les filles.
 - a. Calculer la probabilité conditionnelle $P_F(T)$ que cet élève soit en terminale sachant que c'est une fille.
 - b. Exprimer $P_F(T)$ en fonction de $P(S)$ et de $P(F \cap T)$.
4. a. Décrire par une phrase l'événement $P_T(\bar{F})$ et calculer sa probabilité.
- b. Exprimer $P_T(\bar{F})$ en fonction de $P(T)$ et de $P(T \cap \bar{F})$.

Activité 2 : utiliser la formule des probabilités totales

Une école de danse propose six cours de danse : un cours de danse classique et un cours de danse modern jazz, chacun à un niveau débutant, intermédiaire ou avancé. On suppose qu'un élève ne suit pas de cours de niveaux différents pour le même style de danse et qu'il y a des élèves inscrits dans tous les cours.

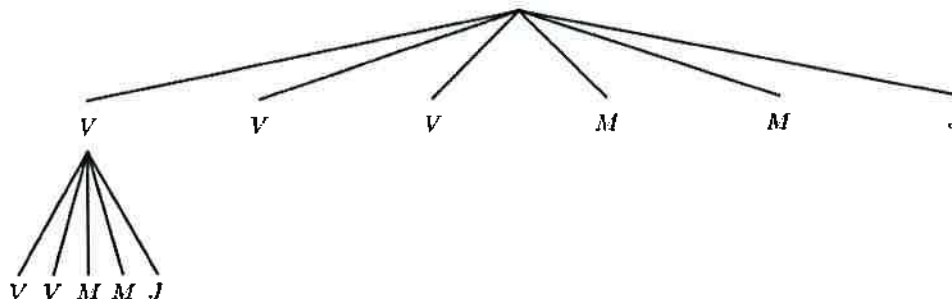
On choisit au hasard un élève de l'école et on lui demande ce qu'il suit comme cours. On note :

- C l'événement : « l'élève suit un cours de classique » ;
 - M l'événement : « l'élève suit un cours de modern jazz » ;
 - D l'événement : « l'élève suit un cours de niveau débutant » ;
 - I l'événement : « l'élève suit un cours de niveau intermédiaire » ;
 - A l'événement : « l'élève suit un cours de niveau avancé ».
1. a. Que peut-on dire des événements D , I et A pris deux par deux ?
 - b. Justifier que les événements D , I et A ne sont pas vides et que $D \cup I \cup A = \Omega$ où Ω est l'univers de toutes les issues.
 2. a. Que peut-on dire des événements $C \cap D$, $C \cap I$ et $C \cap A$, pris deux par deux ?
 - b. Justifier que l'on a $(C \cap D) \cup (C \cap I) \cup (C \cap A) = C$.
 - c. En déduire que $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap I) + P(C \cap A)$.

Activité 3 : utiliser un arbre pondéré

Dans un cageot de six choux-fleurs trois sont verts (V) deux sont mauves (M) et un est jaune (J). L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un chou-fleur dans le cageot, sans le remettre dedans, puis un second et à noter les couleurs obtenues dans l'ordre d'apparition. Par exemple $(V ; M)$ est l'événement : le premier chou-fleur est vert, le second est mauve.

1. a. Compléter l'arbre des possibles suivant.



- b. Comment détermine-t-on le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement $(V ; M)$?
- c. Calculer $P(V ; M)$.

3×2

2. Dans la mesure où seule la couleur des choux-fleurs nous intéresse, on peut réduire la taille de l'arbre, moyennant quelques conventions d'écriture. Par exemple les trois branches correspondant à un chou-fleur vert peuvent être remplacées par une seule branche.

A chaque tirage, les événements V, M, J n'étant pas équiprobables, on pondère alors les branches menant à une couleur par le nombre de choux-fleurs de cette couleur.

a. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Comment retrouve-t-on le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement $(V; M)$?

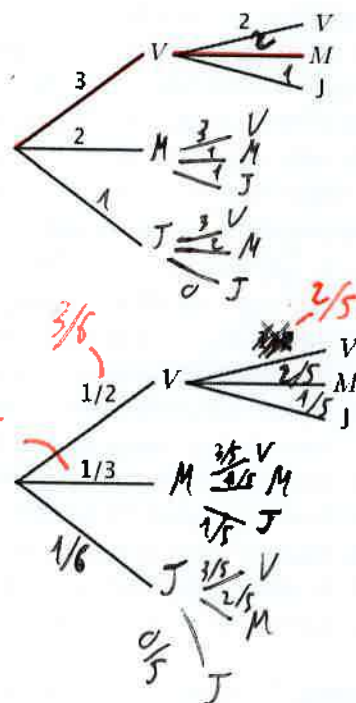
3. Une autre idée consiste à pondérer chaque branche d'un même tirage, non plus avec le nombre de choux-fleurs d'une même couleur comme dans l'arbre précédent, mais par la probabilité d'obtenir cette couleur.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Calculer le produit des probabilités rencontrées sur le chemin représentant l'événement $(V; M)$.

c. Quelle probabilité retrouve-t-on ? Expliquer.

d. Calculer la probabilité d'obtenir un chou-fleur mauve puis un jaune.



Activité 4 : découvrir la notion d'événements indépendants.

On considère les deux situations suivantes :

Situation 1 : On demande à des personnes si elles ont eu le bac (B) et si elles ont les cheveux courts (C). On note les proportions dans le tableau suivant.

	B	$\bar{B}$	Total
C	0,24	0,06	0,3
$\bar{C}$	0,56	0,14	0,7
Total	0,8	0,2	1

Situation 2 : On demande à des personnes si elles mangent des légumes (L) et si elles sont en surpoids (S). On note les proportions dans le tableau suivant.

	L	$\bar{L}$	Total
S	0,18	0,12	0,3
$\bar{S}$	0,62	0,08	0,7
Total	0,8	0,2	1

1. La réalisation de B semble-t-elle, intuitivement, indépendante de celle de C ? En donner une explication possible.

2. Déterminer une relation entre $P(B)$, $P(C)$ et $P(B \cap C)$.

3. La réalisation de L semble-t-elle, intuitivement, indépendante de celle de S ? En donner une explication possible.

4. La relation de la question 2 reste-t-elle vraie avec $P(L)$, $P(S)$ et $P(L \cap S)$?

5. Les situations suivantes sont-elles des situations d'indépendance ? Essayer de répondre en utilisant un raisonnement intuitif puis en utilisant la relation conjecturée.

a. On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est 1 ; 4 ou 6 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

b. Dans un sac opaque on place 20 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 20. On en tire un au hasard. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est un multiple de 3 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

c. Dans un sac opaque on place 21 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 21. On en tire un au hasard. On considère les événements suivants :

A : « le résultat obtenu est un multiple de 3 » ;

B : « le résultat obtenu est pair ».

Définir une probabilité conditionnelle

Exercice 10. 1 (28 p 288)

On choisit un chien au hasard dans un élevage. On note L l'événement : « le chien choisi est un labrador » ; B l'événement : « le chien choisi est un berger allemand » et S l'événement : « le chien choisi est sevré ».



- Interpréter à l'aide de probabilités les informations suivantes :
 - 55 % des chiens de l'éleveur sont des labradors.
 - 36 % des chiens de l'éleveur sont des bergers allemands sevrés.
 - 64 % des labradors sont sevrés.
- À l'aide de pourcentages, traduire par une phrase les probabilités suivantes :
 - $P(B) = 0,8$
 - $P(B \cap \bar{S}) = 0,09$
 - $P_B(S) = 0,80$

Exercice 10. 2 (29 p 288)

Parmi ses salariés, une société compte 70 % d'employés commerciaux. 80 % d'entre eux possèdent une voiture de fonction. Alors que parmi les employés qui ne sont pas des commerciaux, seulement 10 % possèdent une voiture de fonction. On interroge au hasard un employé de la société. On considère les événements suivants :

- C : « L'employé interrogé est un commercial » ;
- V : « L'employé interrogé possède une voiture de fonction ».

- Déduire des informations de l'énoncé :
 - les probabilités $P(C)$ et $P(\bar{C})$;
 - les probabilités $P_C(V)$ et $P_{\bar{C}}(V)$.
- Définir par une phrase l'événement $C \cap V$; calculer la probabilité : $P(C \cap V)$.
 - Définir par une phrase l'événement $\bar{C} \cap V$; calculer la probabilité : $P(\bar{C} \cap V)$.

Exercice 10. 3 (40 p 289)

Une plateforme de jeux vidéo propose en téléchargement 9 600 titres différents dont certains sont gratuits. Les jeux sont rangés dans deux catégories : les jeux d'actions et les autres jeux. Le tableau suivant en donne la répartition.

	Jeux payants	Jeux gratuits	Total
Jeux d'action	1 728	1 104	2 832
Autres jeux	3 456	3 312	6 768
Total	5 184	4 416	9 600

On choisit au hasard un des jeux proposés par la plateforme.

- Déterminer la probabilité de l'événement A : « le jeu choisi est un jeu d'action ».
- Déterminer la probabilité de l'événement G : « le jeu choisi est un jeu gratuit ».
- Déterminer la probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action payant.
- Sachant que le jeu choisi est un jeu gratuit, déterminer la probabilité que ne soit pas un jeu d'action.

5. Le jeu choisi n'étant pas un jeu d'action, déterminer la probabilité que ce soit un jeu payant.

Exercice 10. 4 (42 p 289)

Des personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobayes pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. On a donné à certaines d'entre elles le médicament, les autres ont pris un placebo. On choisit au hasard une personne ayant participé à l'expérimentation et on considère les événements :

A : « la personne choisie a vu son état de santé s'améliorer »,
M : « la personne choisie a été traitée avec le médicament »,
P : « la personne choisie a été traitée avec un placebo ».

Les résultats de l'expérience sont donnés dans le tableau de probabilités suivant.

	A	$\bar{A}$	Total
M	51 %	16 %	67 %
P	5 %	28 %	33 %
Total	56 %	44 %	100 %

Si nécessaire, on arrondira les résultats à 0,01 près.

- Indiquer la signification des valeurs 5 % et 44 %.
- Déterminer $P_A(M)$.
- Déterminer la probabilité que la personne choisie n'ait pas vu son état de santé s'améliorer sachant qu'elle a pris le médicament.

Exercice 10. 5 (43 p 289)

Une étude sur les habitudes de consommation est réalisée auprès d'une population. Il en ressort que, dans la population, 57 % des personnes ont participé aux soldes d'hiver, 76 % des personnes ont participé aux soldes d'été et 42 % des personnes ont participé aux deux.

On interroge au hasard une personne de cette population. On considère les événements : H « la personne interrogée a participé aux soldes d'hiver » et E « la personne interrogée a participé aux soldes d'été ».

- Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableau des probabilités.
- Pourquoi est-il pertinent d'utiliser un tableau pour décrire cette expérience aléatoire ?

Exercice 10. 6 (Métropole, ST2S, 09.15)

La Caisse Primaire d'Assurance Maladie (CPAM) réalise une étude sur trois des principales affections de longue durée en répertoriant les patients selon la maladie qu'ils ont contractée et selon leur sexe. Les affections considérées sont : la leucémie lymphoïde, les anomalies de coagulation et les anomalies du tissu conjonctif. On admet qu'un patient étudié ne peut être atteint que d'une seule maladie. L'étude porte sur 65 955 patients, dont 26 703 hommes.

On observe 28 665 patients atteints d'une leucémie lymphoïde, et parmi ceux-ci, 54 % sont des hommes. Par ailleurs, 55 % des patients atteints d'anomalies de coagulation sont des femmes.

1. À l'aide des informations précédentes, compléter les cases grisées de la feuille de calcul donnée. (On arrondira les résultats à l'unité).

	A	B	C	D	E
1		Patients atteints de leucémie lymphoïde	Patients atteints d'anomalies de coagulation	Patients atteints d'anomalies du tissu conjonctif	Total
2	Homme			4 863	28 703
3	Femme				
4	Total	28 685	14 135	23 155	
5					
6					
7	Probabilités conditionnelles de chaque pathologie selon le sexe du patient.				
8	Sachant que le patient est un homme :				
9		Leucémie lymphoïde	Anomalies de coagulation	Anomalies du tissu conjonctif	
10	Probabilité d'être atteint :	0,58	0,24	0,18	

(source : Améli.fr)

2. On choisit au hasard un patient parmi les 65955 ayant participé à l'étude. On considère les événements suivants :
 L : « Le patient est atteint de leucémie lymphoïde ».
 C : « Le patient est atteint d'anomalies de coagulation ».
 T : « Le patient est atteint d'anomalies du tissu conjonctif ».
 H : « Le patient est un homme ».

Dans la suite de cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

a. Calculer la probabilité de l'événement L, puis celle de l'événement H.

b. Décrire par une phrase l'événement $L \cap \bar{H}$, puis calculer sa probabilité.

c. Calculer la probabilité que le patient soit atteint de leucémie lymphoïde en sachant qu'il s'agit d'un homme.

d. Parmi les trois formules suivantes, choisir celle à entrer dans la cellule B10 de la feuille de calcul, de sorte que, recopiée vers la droite jusqu'à la cellule D10, elle permette d'afficher les probabilités conditionnelles de chaque affection dans le cas où le patient est un homme :

$$=B2/E2; \quad =B2/\$E\$2; \quad =B2/\$B\$4.$$

3. On choisit un patient parmi ceux atteints d'anomalies du tissu conjonctif. Calculer la probabilité que ce patient soit un homme.

Exercice 10. 7 (48 p 290)

Les trois principaux services de soins d'un centre hospitalier sont l'hématologie, la diabétologie et l'urologie. Les seringues utilisées sont fournies soit par le laboratoire Clamex, soit par le laboratoire Spara.

On choisit au hasard et de manière équiprobable un patient qui a eu une prise de sang dans l'un des trois services cités précédemment. On considère les événements suivants :

H : « la prise de sang a été effectuée dans le service hématologie » ;

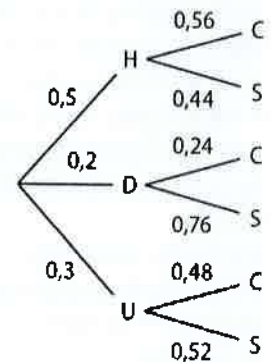
D : « la prise de sang a été effectuée dans le service diabétologie » ;

U : « la prise de sang a été effectuée dans le service urologie » ;

C : « la seringue utilisée a été fournie par le laboratoire Clamex » ;

S : « la seringue utilisée a été fournie par le laboratoire Spara ».

L'arbre ci-contre modélise la situation.



1. Indiquer la signification des nombres 0,2 et 0,48.

2. a. Quelle est la probabilité de l'événement H ?

b. Quelle est la probabilité que la seringue utilisée ait été fournie par le laboratoire Clamex, sachant qu'elle a été utilisée dans le service diabétologie ?

3. Calculer la probabilité de l'événement « le patient choisi a subi une prise de sang dans le service d'urologie avec une seringue fournie par le laboratoire Spara ».

Utiliser la formule des probabilités totales et un arbre pondéré

Exercice 10. 8 (56 p 292)

Les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter des voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique et on admet que :

- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

1. a. Déterminer la probabilité que le portique sonne.

b. Déterminer la probabilité d'avoir un « faux-positif », c'est-à-dire la probabilité que le passager ne porte pas d'objet métallique et que le portique sonne.

2. a. Si le portique sonne pour un passager, quelle est la pro-



bilité que ce passager porte un objet métallique ?

b. Quelle est la proportion de « faux positifs » parmi les passagers pour lesquels le portique a sonné ?

c. Commenter les résultats obtenus aux questions précédentes.

Exercice 10. 9 (68 p 294)

Romane se déplace à vélo ou en transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, elle se déplace en vélo 9 fois sur 10. Sinon, elle ne se déplace en vélo que 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p . Pour une journée donnée, on note :

– E l'événement « La journée est ensoleillée » ;

– V l'événement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0,3p + 0,6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que



Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

- Calculer la valeur de p .
- Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Exercice 10. 10 (Nvle Calédonie ST2S 11.17)

Un test de dépistage d'une maladie a été élaboré par une entreprise pharmaceutique. Pour étudier sa fiabilité, on soumet à ce test une population comportant des personnes malades et des personnes saines.

On sait que dans la population testée :

- la proportion de personnes malades est de 85 % ;
- parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif ;
- parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif.

On choisit au hasard une personne dans la population testée ; on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

- M l'évènement : « la personne est malade » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

Dans cet exercice, la probabilité d'un évènement E est notée $p(E)$; la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé est notée $P_F(E)$; l'évènement contraire d'un évènement E est noté non E .

- Interpréter les données de l'énoncé pour déterminer les probabilités $p(M)$; $p_M(T)$ et $p_{\bar{M}}(\bar{T})$.
- Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- Exprimer par une phrase l'évènement $M \cap T$.
 - Calculer $p(M \cap T)$. En donner la valeur exacte.
- Montrer que $p(T) = 0,845$.
- On considère que le test de dépistage est fiable lorsque la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est supérieure ou égale à 0,95. Le test est-il fiable ?

Exercice 10. 11 (Amérique du Nord, ES, 05.11)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux évènements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_A(B)$.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.

En France les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.

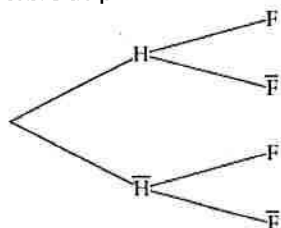
Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Partie A Étude de l'état d'asthme du couple

On note :

- H l'évènement : « L'homme est asthmatique »,
- F l'évènement : « La femme est asthmatique ».

- Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



- On note les évènements :

A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »

B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »

C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

Montrer que :

$$P(A) = 0,912 ; P(B) = 0,086 ; P(C) = 0,002.$$

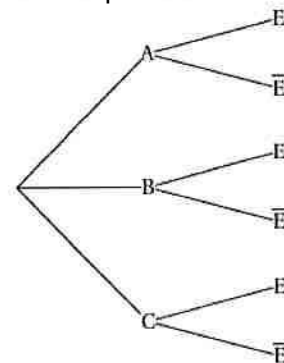
Partie B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'évènement : « Le premier enfant du couple est asthmatique »

- Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



- Montrer que $P(E) = 0,118$.
- Calculer $P_E(A)$ et interpréter le résultat. Déduire $P_E(\bar{A})$ et interpréter le résultat.
- Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ?

Exercice 10. 12 (Ploynésie, TS 06.11)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

- Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait gagné la première.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
- Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
- On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
 - Conjecturer le comportement de (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

b. Proposer un algorithme donnant la valeur du premier entier n tel que $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.

Exercice 10. 13 (Antilles Guyane, TS 09.13)

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

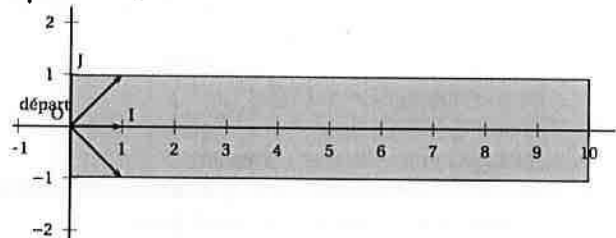
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S : « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0; 0)$ au début de la traversée. On note $(x; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ -1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)

```

1. On donne les couples suivants : $(-1; 1)$; $(10; 0)$; $(2; 4)$; $(10; 2)$.

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

- A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 » ;
- B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 » ;
- C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n , b_n , c_n les probabilités respectives des évènements A_n , B_n et C_n .

1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre

$$0 \text{ et } 9, \text{ on a } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-dessous qui donne des valeurs approchées de a_n , b_n , c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

Caractériser l'indépendance

Exercice 10. 14 (57 p 292)

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair » ;
- B : « le nombre obtenu est un multiple de trois » ;
- C : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à trois ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Répondre à la même question pour les événements A et C, puis pour les événements B et C.

Exercice 10. 15 (58 p 292)

Une enquête a été effectuée sur le temps de parcours

quotidien entre le domicile et le lieu de travail des employés d'une entreprise composée de 3 services que l'on notera a , b et c . Les résultats sont dans le tableau ci-dessous :

Service	a	b	c	Total
Temps de trajet inférieur à 30 min	198	112	130	440
Temps de trajet supérieur à 30 min	252	138	170	560
Total	450	250	300	1000

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :

A : « l'employé fait partie du service a » ;

B : « l'employé fait partie du service b » ;

C : « l'employé fait partie du service c » ;

M : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

1. Les événements A et M sont-ils indépendants ?
2. Les événements B et M sont-ils indépendants ?

Exercice 10. 16 (38 p 289)

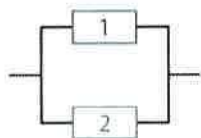
A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

1. La proposition « Si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\bar{A}$ et B sont eux aussi indépendants » est-elle vraie ?
2. Énoncer la contraposée de la proposition précédente. Cette contraposée est-elle vraie ?

Exercice 10. 17 (59 p 289)

Un circuit électronique intègre deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ». On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Exercice 10. 18 (62 p 289) Ca1, 2, 6

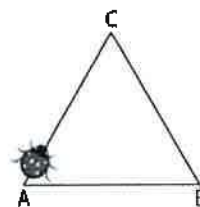
Lors d'un test de sélection, un QCM est proposé aux candidats. Ce QCM comporte deux questions qui ont chacune 3 réponses possibles parmi lesquelles une seule est juste. Un candidat répond au hasard à ce QCM.



1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau de probabilités
2. En déduire la probabilité pour que le candidat ait au moins une réponse juste.

Exercice 10. 19 (64 p 289) Ca1, 2, 6

Une coccinelle se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC. Elle part du sommet A puis vole vers un autre sommet. Son déplacement se fait 2 fois sur 3 dans le sens des aiguilles d'une montre et 1 fois sur 3 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



On s'intéresse aux deux premiers déplacements.

1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau de probabilités.
2. Quelle est la probabilité que la coccinelle soit revenue à son point de départ au bout des deux premiers déplacements ?

Exercice 10. 20 (Polynésie TS, 06.12) Ca1, 2, 4

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 80]$. Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$. Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 10. 21 (Réunion, TES, 06.11) Ca1, 2, 4, 6

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'internet un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale.

On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement internet.
- 1 740 élèves utilisent régulièrement internet.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée.

On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde »
- E l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première »

- T l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale »
- I l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet »

1. Compléter le tableau d'effectifs donné ci-dessous.

	2 nd	1 ^{ère}	Term	Total
Utilise internet régulièrement				
N'utilise pas internet régulièrement				
Total				

- Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement internet.
- Calculer $P_T(I)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
- Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas internet
- Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet.
Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\frac{21}{58}$.
- On choisit au hasard, successivement et avec remise, trois questionnaires. Quelle est la probabilité que, parmi les trois questionnaires, un exactement soit celui d'un élève utilisateur régulier d'internet ? On en donnera la valeur arrondie au millièmes.

Exercice 10. 22 (Métropole, TES, 06.11) Ca1, 2, 4, 6

Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

- 12 % des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20 % ont un défaut dans la forme,
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8 % présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la couleur » et $\bar{C}$ l'évènement contraire.

On appelle F l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la forme » et $\bar{F}$ l'évènement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme.

b. Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme.

c. Les évènements C et F sont-ils indépendants ? Justifier.

3. Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut.

Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.

4. Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel.

L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.

Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut ?
Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Exercice 10. 23 (Métropole, ST2S, 06.17) Ca1, 2, 4, 6

La corpulence est mesurée à partir de l'indice de masse corporelle (IMC) qui est égal au rapport entre la masse (en kilogramme) et le carré de la taille (en mètre). Les individus dont l'IMC est supérieur à 30 sont considérés comme obèses.

On a réalisé en 2006 une étude à l'aide de questionnaires sur une population d'individus âgés de 21 à 59 ans.

Partie A.

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des femmes interrogées.

On note E l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne ayant un emploi ».

On note O l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne considérée comme obèse ».

Selon les données de 2006, on sait que :

- l'effectif total des femmes interrogées est de 2685, dont 1920 ont un emploi ;
- 10,6% des femmes interrogées sont considérées comme obèses ;
- parmi les femmes considérées comme non obèses, 72,7% ont un emploi.

1. On arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

a. Justifier que le nombre total de femmes considérées comme obèses est égal à 285 et que les femmes considérées comme non obèses et ayant un emploi sont au nombre de 1745.

b. Compléter le tableau suivant.

	Obèse	Non obèse	Total
Ayant un emploi	175	1745	1920
N'ayant pas d'emploi	110	655	765
Total	285	2400	2685

2. Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millièmes.

a. Calculer la probabilité de l'évènement E .

b. Calculer la probabilité de l'évènement O .

c. Décrire par une phrase l'évènement $E \cap O$ et calculer la probabilité de cet évènement.

d. Justifier que les événements E et O ne sont pas indépendants.

3. Étude de l'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des femmes en 2006 (les probabilités seront arrondies au millièmes).

a. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi corresponde à une femme ayant un emploi sachant qu'elle est considérée comme obèse.

b. Déterminer la probabilité $P_{\bar{O}}(E)$.

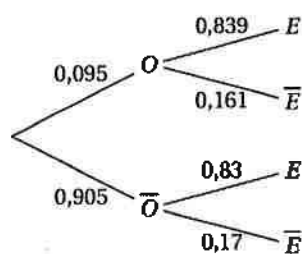
c. En considérant les résultats précédents, que peut-on dire de l'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des femmes en 2006 ?

Partie B

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des hommes interrogés.

On reprend les mêmes notations pour les événements que dans la partie A.

On admet que les probabilités associées à cette expérience aléatoire sont représentées à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :



1. Par lecture de l'arbre, donner la probabilité qu'un homme ait un emploi sachant qu'il est considéré comme non obèse.

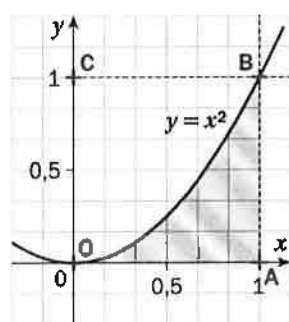
2. Le rapport d'étude conclut qu'il n'y a pas d'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des hommes en 2006. Comment peut-on le justifier à l'aide de l'arbre précédent ?

Exercice 10. 24 (Hatier 110 p 308) A1

On a représenté ci-contre un carré OABC et la fonction carré. On a hachuré la partie du carré située sous la parabole.

1. On prend au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré OABC, d'aire une unité.

a. À quel intervalle appartiennent les nombres réels x et y ?



b. Quelle condition doivent vérifier x et y pour que le point M soit situé dans la partie hachurée ?

2. On souhaite estimer l'aire de la partie hachurée. Pour y parvenir, on prend au hasard 1 000 points dans le carré OABC et on détermine la proportion des points appartenant à la partie hachurée.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer cette proportion P .

```

1  C ← 0
2  Pour k allant de 1 à ...
3      x ← un nombre réel compris entre ...
4      y ← un nombre réel compris entre ...
5      Si ... alors C ← C + 1
6      Fin Si
7  Fin Pour
8  P ← ...

```

b. Programmer l'algorithme et donner une estimation de l'aire de la partie hachurée.

c. Comment obtenir une meilleure estimation ?

3. On considère le quart de disque de centre O et de rayon 1, situé dans le carré OABC, noté D .

a. Quelle est l'aire du quart de disque D ?

b. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Recopier et compléter la phrase :

« Un point $M(x; y)$ appartient au quart de disque D si et seulement si $x^2 + y^2 \dots 1$. »

c. Rédiger un algorithme qui permet d'obtenir une estimation du nombre π .

11 Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire associée à un univers fini sur lequel on a défini une loi de probabilité P .

Définition 11. 1*variable aléatoire*

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω qui à chaque élément de Ω associe un nombre réel.
Définir une variable aléatoire consiste donc à associer un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Remarque

- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est fini. On parle de variable aléatoire discrète.
 - Si $x_1, \dots, x_n$ sont les valeurs prises par X , on note :
 - $\{X = x_i\}$ l'événement « X prend la valeur x_i », c'est à dire l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i par X ;
 - $\{X \geq x_i\}$ l'événement « X prend une valeur supérieure ou égale à x_i », c'est à dire l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x_i .
- On définit de manière analogue les événements $\{X > x_i\}$, $\{X \leq x_i\}$ et $\{X < x_i\}$.

Exemple 11. 1

1. Un restaurant propose trois menus dont les prix respectifs sont 10 €, 12 € et 18 €. Il y a actuellement 100 clients dans le restaurant.
 - a. On choisit un client au hasard et on lui demande le prix de son menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?
 - b. On choisit un menu au hasard et on s'intéresse au nombre de clients ayant choisi ce menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?
2. Une urne contient 12 boules bleues, 2 boules vertes et 6 boules rouges, indiscernables au toucher. Le joueur mise 5 € puis il tire une boule au hasard. Si la boule est verte il gagne 3 €, si elle est rouge il gagne 15 €, si elle est bleue il ne gagne rien.
On note X le gain algébrique d'un joueur à l'issue d'un tirage.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Quelle(s) issue(s) réalise(nt) l'événement $\{X = 10\}$? Même question pour $\{X < 0\}$.

Définition 11. 2 *$P(X = x_i)$, loi de probabilité d'une VAD*

- La probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ est la somme des probabilités des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i .
- Définir la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Remarque

On représente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

Exemple 11. 2

- Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie.
On gagne 5 € à chaque fois qu'on obtient pile, on perd 2€ à chaque fois qu'on obtient face.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain (éventuellement négatif) obtenu à la fin.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 2. Déterminer la loi de probabilité de X .
 3. En déduire $P(X \leq 3)$ puis $P(X > 3)$.

Dans cette partie X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	...	p_n

Définition 11.3*espérance*

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Remarque

- Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X . L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X peut donc s'interpréter comme le résultat moyen d'une expérience aléatoire sur un grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire.
- L'espérance mathématique $E(X)$ permet de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard. On dit que le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, favorable au joueur lorsque $E(X) > 0$ et défavorable lorsque $E(X) < 0$.

Exemple 11.3

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : une boule rouge, trois boules vertes et six boules bleues. Un jeu consiste à tirer une boule dans l'urne. Une boule de couleur rouge rapporte 10 €, une boule de couleur bleue fait perdre 1 € et une boule de couleur verte ne fait rien perdre ni gagner.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

Définition 11.4*variance, écart-type*

- La variance de la variable aléatoire X le nombre réel, noté $V(X)$, donné par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(x))^2 + p_2 (x_2 - E(x))^2 \dots + p_n (x_n - E(x))^2.$$

- L'écart type de la variable aléatoire X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, donné par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque

- Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , l'écart type de la série statistique que l'on obtient se rapproche de l'écart type de X .
- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion : plus il est faible plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance, plus il est grand plus elles tendent à être dispersées autour de l'espérance.
- L'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ ont la même unité que les valeurs x_i .

Exemple 11.4

Soit X la variable aléatoire donnée dans l'exemple précédent.
Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Propriété 11.1

Soient a et b deux réels.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

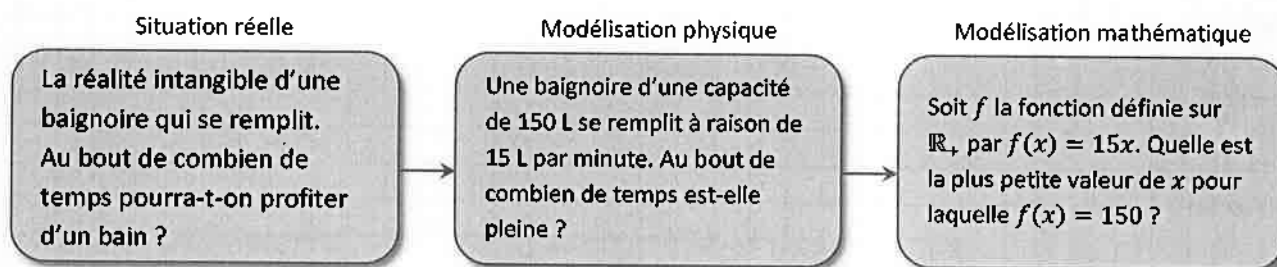
Formule de König : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

linéarité de l'espérance.

Exemple 11.5

Les règles du jeu de l'exemple 11.3 changent : on mise 2 € et on multiplie le gain algébrique par 3.
On appelle Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique de ce nouveau jeu.
Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ puis comparer les deux jeux.

Modéliser une situation, c'est l'exprimer de manière simple dans un cadre qui permet le raisonnement. La modélisation est le nom que l'on donne à la fois au fait de modéliser et au résultat de cette action. Les mathématiques sont un cadre qui permet le raisonnement et une modélisation mathématique est une modélisation dans ce cadre. Une situation peut-être modélisée de multiples façons différentes. La modélisation en tant que résultat est, elle-même, une situation qui peut être modélisée à son tour. On peut ainsi opérer plusieurs modélisations de manière successives à partir d'une seule situation initiale. Voici un exemple de deux modélisations successives d'une situation réelle dont la dernière étape est une modélisation mathématique.



Dans le cadre mathématique on résout l'équation $f(x) = 150$ et on trouve $x = 10$. On conclut que la baignoire sera pleine au bout de 10 minutes en repassant à la modélisation physique. On peut alors conclure qu'on pourra profiter du bain dans une dizaine de minutes.

Exemple 11.5:

$$\begin{array}{l|l} R: 1 \rightarrow 10€ & 28€ \\ V: 3 \rightarrow 0€ & -2€ \\ B: 6 \rightarrow -1 & -5€ \end{array}$$

y_i	-5	-2	28
$P(Y=y_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Y) = -5 \times \frac{5}{10} - 2 \times \frac{3}{10} + 28 \times \frac{1}{10} =$$

ou $Y = 3X - 2$ on a $E(Y) = 3E(X) - 2 = 3 \times \frac{2}{5} - 2 = -\frac{4}{5}$

$$\sigma(Y) = |a| \sigma(X) = 3 \times \sqrt{\frac{261}{25}}$$

les gains du deuxième sont plus dispersés que le premier.

Simuler une variable aléatoire avec Python

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Répéter 10 fois, 100 fois, 10 000 fois une expérience aléatoire par simulation, cela se fait très facilement avec Python. Nous pourrions ainsi observer le « comportement » du hasard sur un grand nombre de répétitions d'épreuves aléatoires.

Partie B. Un exemple

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un 6 et qui vaut 0 si on n'obtient pas un 6. Nous allons simuler 1 000 répétitions de ce jeu et enregistrer les 1 000 valeurs prises par X dans une liste.

1. Simulation de la variable aléatoire

La bibliothèque `random` donne accès à la commande `randint(1,6)` qui renvoie un entier aléatoire entre 1 et 6. C'est une simulation d'un lancer de dé équilibré. On peut alors obtenir la valeur x de X correspondante à l'aide d'une affectation conditionnelle, comme l'indique le programme ci-contre :

```
1 from random import randint
2 x= 1 if randint(1,6)==6 else 0
3 print(x)
```

2. Simulation de 1 000 répétitions

a. Analyser le programme Python ci-contre et expliquer pourquoi il permet de simuler 1 000 lancers de dé équilibré.

```
1 from random import randint
2 L=[1 if randint(1,6)==6 else 0 for k in range(1000)]
```

b. À votre avis, quelle devrait être la fréquence d'apparition du 1 dans la liste L ?

Application 1

Faire une simulation, sur 1 000 lancers de dé, de la variable aléatoire indiquant le gain au jeu suivant : on lance un dé, si le résultat du lancer est un nombre pair i , on gagne i euros, si c'est un nombre impair j , on perd $2(j-1)$ euros.

INDICATION

En Python, l'instruction `if x%2==0` permet de savoir si x est divisible par 2.

Application 2

On effectue 20 tirages successifs d'une boule au hasard avec remise dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires. On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de boules rouges obtenues.

Expliquer pourquoi le programme ci-contre permet de simuler une telle expérience.

```
1 from random import randint
2 print(sum([1 if randint(1,10)<7 else 0 for k in range(20)]))
```

Application 3

On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1[$. X est la variable aléatoire qui vaut 3 si $x^2 < 0,5$ et qui vaut -3 si $x^2 \geq 0,5$.

1. Écrire un programme avec Python qui simule cette variable aléatoire X .

2. En déterminant l'ensemble des solutions de $x^2 < 0,5$ sur $[0 ; 1[$, démontrer que $P(X = 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Nous avons vu, dans l'expérimentation 1, des exemples de simulation d'une variable aléatoire avec Python. Si on répète 1 000 fois une telle simulation, on obtient un échantillon de taille 1 000. C'est-à-dire que l'on peut obtenir une liste de 1 000 valeurs x_i .

Rappelons que la moyenne m d'un tel échantillon est alors donnée par la formule $m = \frac{\sum x_i}{1\,000}$.

Partie B. Un exemple

Une précision : si une liste ne contient que des nombres, l'instruction `sum(L)` permet d'obtenir la somme des termes de la liste.

On appelle S la variable aléatoire égale à la somme des faces obtenues quand on lance trois dés équilibrés.

1. Expliquer pourquoi le programme suivant permet d'afficher 1 000 simulations de S :

```
1 from random import randint
2 S=[randint(1,6)+randint(1,6)+randint(1,6) for k in range(1000)]
3 print(S)
```

2.a. Que permet d'obtenir le programme ci-contre ?

b. Calculer la moyenne d'un échantillon de taille 1 000 de S .

```
4 def m(S):
5     return sum(S)/len(S)
```

Application 1

On appelle S la variable aléatoire égale à la somme des faces obtenues quand on lance deux dés équilibrés.

1. Écrire un programme Python qui permet d'afficher 10 000 simulations de S .
2. Calculer la moyenne de cet échantillon.
3. Écrire un programme Python qui crée un échantillon de taille n de S , valable pour tout entier naturel n non nul.

Application 2

On tire quatre cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cartes « cœur » obtenues.

1. Simuler la variable aléatoire X à l'aide d'un programme Python.
2. Obtenir un échantillon de X de taille 10 000.
3. Calculer la moyenne de cet échantillon.

Application 3

1. Expliquer ce que réalise le programme Python suivant :

```
1 from random import random
2 X=[1 if random() $\leq$ 0.5 else 0 for k in range(1000)]
3 print(sum(X)/1000)
```

RAPPEL

L'instruction `random()` renvoie un nombre réel aléatoire de $[0 ; 1[$.

2. Lancer le programme et indiquer la valeur obtenue.

REMARQUE

On pourra constater que la valeur obtenue est proche de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Distance entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et son espérance

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Le bon sens permet de penser qu'en lançant 60 fois un dé non truqué, on obtiendra en moyenne 10 fois le 6.

Cette valeur théorique, qui indique le nombre moyen d'apparitions du 6, correspond à la notion d'espérance. On conçoit qu'en réalisant un échantillon simulé, la moyenne m observée sur cet échantillon n'est pas exactement égale à $\frac{10}{60}$.

Nous allons étudier sur quelques exemples les écarts obtenus entre la moyenne m et l'espérance.

Partie B. Un exemple : tirage de boules

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Un jeu consiste à prendre une boule au hasard dans cette urne et à noter son numéro b . On note X la variable aléatoire définie ainsi :

$X = 1$ si $b < 3$;

$X = 2$ si $2 < b < 6$;

$X = 3$ si $5 < b$.

On voit que $P(X = 1) = \frac{3}{10}$; $P(X = 2) = \frac{3}{10}$

et $P(X = 3) = \frac{4}{10}$.

1. Vérifier que $E(X) = 2,1$.

2. Voici un programme en Python :

```
1 from random import randint
2 l=[]
3 for k in range(10000):
4     b=randint(0,9)
5     if 0<=b<3:
6         l.append(1)
7     if 2<b<6:
8         l.append(2)
9     if 5<b:
10        l.append(3)
11 print(sum(l)/10000)
```

Analyser le programme ci-dessus et expliquer pourquoi il permet d'obtenir la moyenne d'un échantillon. Préciser la taille de cet échantillon.

3. Lancer ce programme plusieurs fois et comparer les résultats obtenus avec la valeur de $E(X)$.

Application 1

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie, on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de *pile* obtenus.

1. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. En déduire la loi de X .

3. Vérifier que $E(X) = \frac{3}{2}$.

4. Écrire un programme Python qui crée un échantillon simulé de taille 10 000 de X et qui renvoie la moyenne m de cet échantillon.

5. Lancer ce programme 10 fois et compléter le tableau ci-dessous.

Que peut-on dire des écarts observés ?

Échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Moyenne m										
Distance $ m - E(X) $										

Application 2

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de *pile* obtenus.

On peut démontrer que $E(X) = 2,5$.

1. Écrire un programme Python qui crée et renvoie la moyenne d'un échantillon de taille 500 puis d'un échantillon de taille 5 000.

2. Que peut-on dire des distances entre les moyennes de ces échantillons et $E(X)$?

Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire

Partie A. De quoi s'agit-il ?

Nous allons étudier sur des exemples dans quelles proportions une moyenne observée sur un échantillon simulé d'une variable aléatoire peut s'écarter de l'espérance (notée μ).

Partie B. Un exemple

Supposons que l'on jette une pièce de monnaie non truquée et considérons la variable aléatoire X qui associe à PILE le nombre 1 et à FACE le nombre -1 .

1. Vérifier que $E(X) = 0$ et que l'écart-type de X est égal à 1.

2. Effectuons n lancers de la pièce et calculons la moyenne de cet échantillon, c'est-à-dire, en notant x_i les valeurs de X (ici 1 ou -1), $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. On conçoit intuitivement que la moyenne de l'échantillon doit être proche de 0 ; d'autant plus proche que n est grand.

a. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre permet de simuler un échantillon de taille $n = 100$ de X et permet d'obtenir la moyenne d'un tel échantillon.

```
1 from random import randint
2 L=[1 if randint(1,2)==1 else -1 for k in range(100)]
3 print(L)
4 print(sum(L)/100)
```

b. Lancer le programme et comparer la valeur obtenue avec $E(X)$.

3. On se propose à présent de simuler N échantillons de taille $n = 100$. Notons $m_1, m_2, \dots, m_N$ les moyennes de ces échantillons. En théorie des probabilités, on s'intéresse au problème suivant :

(1) « Quelle est la proportion des m_i qui appartiennent à l'intervalle $[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$? »

C'est-à-dire, ici, puisque $\mu = 0$, $\sigma = 1$,

$n = 100$, quelle est la proportion des m_i qui appartiennent à $[-\frac{2}{10} ; \frac{2}{10}]$?

a. Analyser le programme ci-contre et expliquer pourquoi il permet de répondre à cette question.

b. Faire tourner ce programme pour $N = 1\,000$ et vérifier que la proportion obtenue est voisine de 0,95.

```
1 from random import randint
2 def m():
3     L=[1 if randint(1,2)==1 else -1 for k in range(100)]
4     m=sum(L)/100
5     return m
6 N=int(input("nombre d'échantillons ?"))
7 L1=[m() for k in range(N)]
8 L2=[u for u in L1 if -0.2<=u<=0.2]
9 print(len(L2)/N)
```

Application

On choisit une personne au hasard dans la population d'un pays. On estime que la probabilité que cet individu soit atteint d'une maladie M est égale à 0,1. On considère la variable aléatoire X suivante :

$X = 1$ si la personne est atteinte de la maladie M .

$X = 0$ si la personne n'est pas atteinte de la maladie M .

1. Calculer $E(X)$ et σ_X .

2. Écrire un programme Python qui permette de répondre au problème (1) de la question 3 de l'exercice précédent ci-dessus dans le cas $n = 500$ et $N = 1\,000$.

Activité 1 : variable aléatoire

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. a. Préciser l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
b. Quelle loi de probabilité peut-on choisir sur cet ensemble ?
c. Quelle est la probabilité de l'événement A : « obtenir un 7, un 8, un 9 ou un 10 » ?
2. On convient que la mise est de 5 € et que le joueur gagne 5 € si la carte tirée est une figure, 10 € si c'est un as et 0 € dans les autres cas.

A chaque issue de l'expérience est donc associé un gain algébrique, positif ou négatif. Appelons X la fonction qui réalise cette association. Nous nommerons variable aléatoire une telle fonction.

- a. Sur quel ensemble est définie la variable aléatoire X ?
- b. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X , c'est à dire l'ensemble des gains possibles ?
- c. On note $X = -5$ l'événement « le gain est -5 € ». Calculer $p(X = -5)$.
- d. Compléter le tableau suivant en calculant, pour chaque valeur x_i prise par X , la probabilité $p(X = x_i)$.

x_i	-5	0	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{5}{32}$

Ce tableau définit une nouvelle loi de probabilité sur le nouvel ensemble E constitué des valeurs x_i prises par X . Cette loi de probabilité est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X .

3. La règle du jeu change. Elle est la même que dans la question précédente mais cette fois la somme est doublée lorsque la carte est un cœur.

Cette règle permet de définir une nouvelle loi de probabilité Y donnant le nouveau gain algébrique du joueur. Déterminer, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

Activité 2 : espérance

Un jeu consiste à lancer un dé à six faces parfaitement équilibré. Si l'on obtient 1, 2, 3, 4 ou 5 on gagne un euro, si on obtient six on perd cinq euros.

1. Dans la feuille de calcul ci-dessous on a simulé 1 000 lancers de dé.

	A	B	C	D
1	Numéro sorti			
2	6			
3	3		fréquence pertes de 5 € :	0,1703
4	3		fréquence gains de 1 € :	0,8297
5	1			
6	6		gain moyen :	-0,0218
7	1			

- a. Quelle formule saisir dans la cellule A2 ?
Rappel :
- Une formule de calcul commence par « = » sinon le tableur interprète l'entrée comme un texte à afficher ;
- ALEA.ENTRE.BORNES(min;max) renvoie un nombre entier aléatoire compris entre min et max.
- b. Quelle formule saisir dans D3 ?
Rappel :
- A2 fait référence au contenu de la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne A ;
- NB.SI(plage;critère) indique le nombre de cases de la plage correspondant au critère.
Par exemple NB.SI(A2:A6;2) indique le nombre de 2 contenus dans les cases de la plage allant de A2 à A6.
- c. Quelle formule saisir dans la cellule D4 ?
- d. Comment peut-on obtenir le gain moyen à partir des fréquences obtenues en D3 et D4 ? En déduire une formule à entrer en D6.
- e. Modifier les formules écrites précédemment, pour obtenir une simulation avec 10 000 puis 50 000 parties, et préciser vers quelle valeur le gain moyen semble se stabiliser.
2. a. Expliquer les fréquences trouvées en D3 et D4.
b. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X .
c. En déduire une façon d'estimer le gain moyen avec les données du problème, sans simulation. Ce gain moyen est appelé espérance de la variable aléatoire X .
d. Le jeu est-il équitable, favorable ou défavorable au joueur ?

1 Définir et exploiter la loi d'une variable aléatoire

Exercice 11. 1 (28 p 318)

Une boîte contient quatre jetons marqués « 1 », « 2 », « 3 », « 4 ». On en tire un jeton au hasard. Si le nombre marqué est pair, on gagne un nombre de points égal au double de ce nombre. Et si le nombre marqué est impair on perd un nombre de points égal au nombre marqué.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points gagnés.

- Quelle est l'issue qui permet de gagner 4 points ?
- Quelle est l'issue qui correspond à l'événement $\{X = -3\}$? Que vaut $P(X = -3)$?
- Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X < 4\}$? Que vaut $P(X < 4)$?

Exercice 11. 2 (34 p 318)

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque élève de 1^{re}, associe le nombre de connexions un jour donné à l'ENT de son lycée. La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

Nombre de connexions k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,15	0,38	0,35	a	0,03

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La valeur de a est 0,09.
- $P(X \leq 2) = 0,88$.
- La probabilité que l'élève se connecte au moins une fois est égale à 0,47.

Exercice 11. 3 (41 p 319)

Un sac contient 26 jetons marqués chacun avec une des 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On gagne 5 € par voyelle tirée et on perd 1 € par consonne tirée.

- Construire un arbre pondéré illustrant cette expérience.
- Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ?
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le gain algébrique du joueur.

Exercice 11. 4 (40 p 319)

Une machine est alimentée en résistances de 1 et 2 ohms. Elle doit souder successivement trois résistances en série : deux résistances de 2 ohms puis une de 1 ohm. Cette machine est déréglée et elle soude trois résistances au hasard.

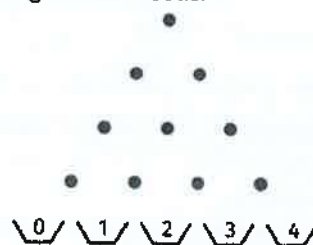
Un résultat est noté sous la forme d'un triplet. Par exemple, le triplet (1,1,2) correspond au cas où les deux premières résistances soudées sont des résistances de 1 ohm et la troisième est une résistance de 2 ohms.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque triplet, associe la somme des valeurs des trois résistances.

Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 5 (Livrescolaire 55 p 325)

La planche de Galton. Un joueur lâche une bille sur une planche inclinée sur laquelle sont plantés des clous comme sur la figure ci-dessous.



À chaque clou rencontré, la bille passe indifféremment à droite ou à gauche. En fin de parcours, elle tombe dans l'une des cases numérotées de 0 à 4. Le numéro de la case est donc le nombre de fois où la bille est descendue à droite lors de son parcours.

- Traduire cette situation par un arbre de probabilité.
- Soit X la variable aléatoire qui au lancer d'une bille associe le numéro de la case dans laquelle elle termine son parcours. Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 6 (Livrescolaire 55 p 325)

On lance un dé icosaédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 20, que l'on suppose bien équilibré.



On marque :

- 2 points si le nombre obtenu est pair ;
- 3 points si le nombre obtenu est premier ;
- 5 points si le nombre obtenu est un multiple de 5 ;
- 7 points si le nombre obtenu est un carré parfait.

Les points sont cumulables.

Soit X la variable aléatoire qui associe au lancer du dé le nombre de points marqués par le joueur.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- En déduire $P(X \leq 5)$, $P(3 \leq X \leq 7)$ et $P(X > 7)$.

2 Espérance et écart type

Exercice 11. 7

On souhaite comparer deux jeux de hasard en étudiant les variables aléatoires X et Y qui associent à chaque jeu le gain correspondant en euros. Les lois de probabilité de X et Y sont les suivantes :

x_i	-2	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	1/4	1/3	1/4	1/12	1/12

y_i	-5	1	2	5	10
$p(Y = y_i)$	1/3	1/6	1/12	1/4	1/6

- Vérifier que les tableaux ci-dessus décrivent bien des lois de probabilité.
- Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
Interpréter l'espérance pour comparer les deux jeux.
- Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
Quelle information supplémentaire peut-on déduire de ces paramètres ?

Exercice 11. 8 (CQFD 57 p 308)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers, de lois données par les tableaux ci-dessous (incomplet pour la loi de Y) :

Valeurs x_j de X	-8	3	4
Probabilités p_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Valeurs y_k de Y	0	2	5	8
Probabilités p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

- Calculer l'espérance de X .
- a. Recopier et compléter le tableau donnant la loi de Y .
b. Calculer $E(Y)$.
- En déduire : a. $E(2X+Y)$ b. $E(X-Y)$

Exercice 11. 9 (Livrescolaire, 86 p 330)

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	-10	0	2	10	100
$P(X=x_i)$	0,4	0,25	0,2	0,1	0,05

On souhaite rédiger un programme avec Python qui permette de calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

- Expliquer ce que calcule le programme suivant.
Quelle est la valeur finale de la variable S calculée ?

```

1 X = [-10, 0, 2, 10, 100]
2 P = [0.4, 0.25, 0.2, 0.1, 0.05]
3 S = 0
4 for i in range(5):
5     S = S + X[i] * P[i]
6 print(S)

```

- Compléter le programme pour qu'il calcule également la variance de X et son écart-type.

Exercice 11. 10 (75 p 330)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -2, 0 et 1, et dont l'espérance mathématique est nulle.

On sait de plus que $P(X=1) = \frac{1}{3}$.

- Déterminer $V(X)$.
- Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 11. 11 (Déclic, 90 p 365)

On donne ci-contre le tableau résumant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

Soit x un réel. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E((X-x)^2)$$

- Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 2(p_1x_1 + p_2x_2)x + (p_1x_1^2 + p_2x_2^2)$$

- a. Justifier que f est un polynôme de degré 2 dont on donnera les coefficients.
b. Montrer que f admet un minimum. En quelle valeur est-il atteint ? Que représente ce minimum pour la variable aléatoire X ?
- Reprendre les questions précédentes pour une variable aléatoire X prenant les valeurs x_i avec une probabilité p_i , pour $1 \leq i \leq n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. 12 (sujet C p 319)

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme ci-dessous.

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Si la fléchette atteint :

- une case rouge, le joueur gagne 8 euros ;
- une case verte, le joueur gagne 5 euros ;
- une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien ;
- une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

- On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

- Donner la loi de probabilité de X .
- Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de a .
- Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $E(X)$ soit nulle.

- Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

- Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?
- Un joueur joue trois parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ?

Exercice 11. 13 (sujet B.p 319)

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée.

Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

- 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
- 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
- 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée.

Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

– 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;

– 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;

– 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

1. Jeanne participe à ce jeu et tire au hasard une question. Déterminer la probabilité que :

a. la question soit dans la catégorie sport et qu'elle donne la bonne réponse ;

b. sa réponse soit bonne à la question posée.

2. Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :

– 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;

– 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;

– 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;

– rien si la réponse qu'elle donne est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne, associe son gain.

On appelle gain la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.

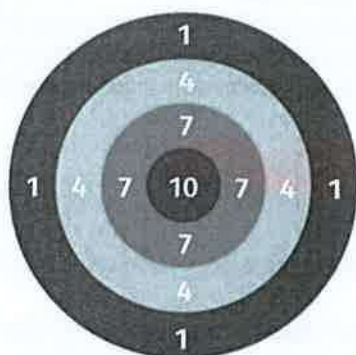
a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de X .

Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

Exercice 11. 14 (68 p 326)

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous.



- La zone rouge est un cercle de rayon 10 cm.
- La zone orange est une couronne dont le grand rayon est 30 cm.
- La zone jaune est une couronne dont le grand rayon est 50 cm.
- La zone bleue est une couronne dont le grand rayon est 70 cm.

La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à sa surface.

On suppose que le participant ne rate jamais la cible.

1. Calculer la surface totale de la cible puis les probabilités d'atteindre les différentes zones ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

a. Donner la loi de probabilité de X .

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 11. 15 (Délic 80 p 362)

Une roulette de casino comporte 37 cases, numérotées de 0 à 36. On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti. Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.



1. Lorsqu'un joueur mise sur l'un des numéros, on dit qu'il fait un plein. Dans ce cas-là, si le numéro misé sort, il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon il perd sa mise au profit du casino.

Un joueur mise 10 € et fait un plein.

On note X son gain algébrique, en euro.

a. Quel gain le joueur peut-il espérer ?

b. Calculer l'écart type $\sigma(X)$.

2. Lorsqu'un joueur mise sur deux numéros différents, on dit qu'il fait un cheval. Dans ce cas-là, si l'un des numéros choisis sort, il remporte 17 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon, il la perd.

Un joueur mise 10 € et fait un cheval.

On note Y son gain algébrique, en euro.

a. Quel gain le joueur peut-il espérer ?

b. Calculer l'écart type $\sigma(Y)$.

3. Comparer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$, puis les écarts types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter dans le contexte.

Exercice 11. 16 (TS Antilles Guyane, sept 2010)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit deux animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux deux animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des deux animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,058	0,0015

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
 b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager en moyenne ?

Exercice 11. 17 (74 p 330)

Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 € pour le défaut A et 150 € pour le défaut B. On admet que 90 % des objets produits n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B et 4 % ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

3. On admet que tous les objets produits sont vendus.

- a. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 € chaque objet produit ?
 b. L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun d'eux.

Exercice 11. 18 (77 p 330)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert.

Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.

Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.

Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :

– si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 € ;

– s'il est blanc, il perd 2 € ;

– s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (où $n \geq 1$).

Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de X_1 .

b. Calculer l'espérance mathématique de X_1 .

2. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

3. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n .

4. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.

5. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale.

Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

Exercice 11. 19 (78 p 331)

Dans une fête foraine, un organisateur dispose de deux sacs de 30 boules chacune. Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

Le sac S_1 contient 27 boules blanches et 3 boules rouges.

Le sac S_2 contient 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante :

Le joueur mise 1 euro et tire une boule dans le sac S_1 qu'il remet ensuite dans ce sac.

– Si la boule tirée est rouge, alors le joueur tire une boule dans le sac S_2 , note sa couleur et le jeu s'arrête.

– Si la boule tirée est blanche, alors le joueur tire une boule dans le sac S_1 , note sa couleur et le jeu s'arrête.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules rouges.

Déterminer $P(X=2)$ et $P(X=1)$.

2. Si les deux boules tirées sont rouges, alors le joueur reçoit 10 euros. Si une seule boule est rouge, il reçoit 2 euros, sinon il perd sa mise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y .

b. Déterminer l'espérance mathématique de Y . Que peut-on en déduire ?

3. Soit n un entier naturel supérieur à 2. Le joueur décide de jouer n parties consécutives indépendantes.

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - a^n$ où l'on déterminera a .

b. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n > 0,9$.

Exercice 11. 20

Une urne contient 5 boules rouges, 4 jaunes et n vertes avec n entier naturel supérieur ou égal à 2. Ces $n+9$



boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. a. Démontrer que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{n^2+41}{(n+9)^2}$.

b. En déduire que la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente est $\frac{18n+40}{(n+9)^2}$.

2. On considère le jeu suivant : le joueur gagne 2 € si les deux boules obtenues sont de même couleur et perd 3 € sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Montrer que l'espérance de X est :

$$E(X) = \frac{2(n^2-27n-19)}{(n+9)^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2(x^2-27x-19)}{(x+9)^2}.$$

a. On admet que $\forall x \in [2; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{10(9x^2+40x-369)}{(x+9)^4}.$$

Dresser le tableau de variations de f .

b. Résoudre dans $[2; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

4. a. Déterminer n pour que $E(X)$ soit minimale.

b. A partir de quelle valeur le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 11. 21 (Délic, 75 p 361)

La finale d'un tournoi de judo oppose David et Teddy. Plusieurs combats doivent les opposer et le premier qui gagne deux combats remporte le titre. On suppose que la probabilité que Teddy gagne un combat est constante et égale à p .



On note X la variable aléatoire égale au nombre de combats nécessaires pour désigner le vainqueur du tournoi.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. On considère la fonction $\text{tournoi}(p)$ suivante.

```
from random import*
def tournoi(p):
    NbTeddy=0
    NbDavid=0
    NbCombats=0
    while NbTeddy<2 and NbDavid<2:
        NbCombats=NbCombats+1
        if random()<p:
            NbTeddy=NbTeddy+1
        else:
            NbDavid=NbDavid+1
    return NbCombats
```

Justifier que cette fonction simule un tournoi et qu'elle renvoie la valeur prise par X sur cette simulation.

3. On souhaite simuler 1 000 tournois par la fonction $\text{répartition}(p)$ suivante de façon qu'elle renvoie la liste des fréquences observées, dans l'ordre, des événements $\{X=2\}$ et $\{X=3\}$.

```
def répartition(p):
    échantillon=[]
    for i in range(1000):
        échantillon.append(tournoi(p))
    Nb2=échantillon.count(2)
    Nb3=échantillon.count(...)
    return [...,...]
```

a. Sachant que l'instruction $L.append(x)$ insère la valeur x à la liste L , que représente la liste échantillon dans cette fonction ?

b. Compléter la fonction $\text{répartition}(p)$.

c. Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie le nombre moyen de combats sur la simulation.

d. Programmer et estimer l'espérance $E(X)$ lorsque $p=0,5$, puis pour $p=0,8$.

4. a. Construire un arbre pondéré représentant un tournoi et déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p .

En déduire l'expression de $E(X)$ en fonction de p .

b. Justifier que $E(X) = -2p^2 + 2p + 2$.

c. Pour quelle valeur de p l'espérance $E(X)$ est-elle la plus grande possible ?

Interpréter dans le contexte de l'exercice.

d. Vérifier les résultats obtenus en 3. d.

Exercice 11. 22 (Délic 70 p 360)

D'après un

sondage BVA datant de 2018,

76 % des jeunes âgés de 18 à

24 ans pratiquent une activité

sportive toutes les semaines.

On suppose que cette propor-

tion se maintient ensuite.

1. On choisit au hasard une personne âgée de 18 à 24 ans et on s'intéresse à sa pratique sportive hebdomadaire.

On considère la fonction $\text{simul}(p)$ ci-contre.

Justifier que $\text{simul}(0,76)$

permet de simuler l'expé-

rience. Préciser le résultat

renvoyé lorsque la personne

pratique un sport de façon hebdomadaire.

2. On choisit maintenant au hasard deux personnes âgées de 18 à 24 ans. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant une pratique sportive hebdomadaire parmi les deux choisies.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Expliquer pourquoi la fonction $\text{simul2}(0,76)$ donnée ci-dessous permet de simuler cette expérience.

```
def simul2(p):
    compt=0
    for i in range(2):
        compt=compt+simul(p)
    return compt
```

c. On simule
10 000 fois cette
expérience à l'aide du
programme ci-contre.
On a obtenu l'affichage
suivant :

```
p=0.76
L=[0,0,0]
for i in range(10000):
    j=simul2(p)
    L[j]=L[j]+1
print(L)
```

$L = [556; 3695; 5749]$

Conjecturer la loi de probabilité de X .

3. En représentant la situation à l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X .
Comparer avec le résultat de la question 2. c.